

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Александр Киселев

Недостижимость
и
субнедостижимость

В двух частях
Часть II

Минск
“Издательский центр БГУ”
2011

УДК 510.227

Киселев, А. А. Недостижимость и субнедостижимость. В 2 ч. Ч. 2 / Александр Киселев. – Минск: Изд. центр БГУ, 2011. – 155 с. – ISBN 978-985-476-935-6.

Данная работа представляет собой перевод с английского языка монографии Киселева А. А. под тем же названием, содержащей доказательство (в ZF) несуществования больших кардиналов, 1-е издание которой вышло в свет в 2000 году. Часть II содержит приложения аппарата субнедостижимых кардиналов и его основных средств — теорий редуцированных формульных спектров и матриц, диссеминаторов и других, которые используются в этом доказательстве и представлены здесь в их более прозрачной и детализированной форме. Большое внимание уделяется более глубокой разработке и культивированию базовых идей, служащих основаниями для основных конструкций и рассуждений. Доказательство теоремы о несуществовании больших кардиналов представлено в его подробном виде. Излагается несколько простых следствий этой теоремы и других хорошо известных классических результатов.

Предназначено для специалистов по теории множеств и математической логике, а также для преподавателей и студентов факультетов математического профиля.

Библиогр.: 47 назв.

Перевод осуществлён по изданию: **Kiselev, Alexander.** Inaccessibility and Subinaccessibility. In 2 pt. Pt 2 / Alexander Kiselev. – 2nd ed., enrich. and improv. Minsk : Publ. center of BSU, 2010.

Р е ц е н з е н т ы
профессор *П. П. Забрейко*;
профессор *А. В. Лебедев*

Математическая классификация тем (2000):
03E05, 03E15, 03E35, 03E55, 03E60

ISBN 978-985-476-935-6 (ч. 2)

© Киселев А. А., 2011

ISBN 978-985-476-597-6 (pt. 2)

© Kiselev Alexander, 2010

Посвящается моей матери Анне

Благодарности

Автор высказывает свои первые слова глубокой благодарности Ханне Калиендо за понимание значительности темы и за сердечную воодушевляющую помощь в продвижении работы.

Особая признательность выражается проф. С. Р. Когаловскому, который научил автора Теории Иерархий, и проф. Акихиро Канамори за их бесценную воодушевляющую поддержку, придавшую необходимый импульс завершению работы.

Автор хотел бы также выразить особую благодарность проф. А. В. Лебедеву и проф. П. П. Забрейко за многолетнюю поддержку его работ; большой интеллектуальный и моральный долг высказывается им обоим за их практическую и духовную помощь.

Глубокую благодарность автор высказывает А.А. Лапцевичу, начальнику Минского государственного высшего авиационного колледжа; С. В. Сизикову, заместителю начальника; А.И. Рипинскому, декану факультета гражданской авиации; А. И. Кириленко, заведующего кафедрой естественнонаучных дисциплин, за создание условий для плодотворной работы над этим изданием.

Глубокая благодарность выражается проф. А. В. Тузикову и Ю. Прокопчуку, которые оказывали автору интенсивную экспертную помощь в наборе текстов.

Проф. В. М. Романчак оказывал автору материальную и моральную помощь в продолжении самого сложного периода исследований темы и автор направляет ему много слов глубокой благодарности.

Большая благодарность высказывается также Людмиле Лап-тёнок, которая осуществила много первоначальных трудных наборов предыдущих текстов автора, подготовивших эту работу.

Но самая глубокая сердечная благодарность высказывается Надежде Забродиной за многолетние воодушевление и поддержку, без которых эта работа была бы значительно затруднена.

Группа других специалистов, которые в течении долгих лет поддерживали и воодушевляли автора, слишком велика, чтобы их перечислить, и автор выражает им всем свою великую благодарность.

Содержание

Введение	9
Глава II. Специальная теория: матричные функции	13
§7 Матричные δ -функции	13
§8 Матричные α -функции	27
§9 Анализ монотонности α -функций	72
§10 Анализ немонотонности α -функции	99
Глава III. Приложения специальной теории	109
§11 Доказательство основной теоремы	109
§12 Некоторые следствия	144
Примечания	149
Литература	151

Введение

Эта работа представляет собой непосредственное продолжение предыдущей части I [29] и составляет с ней единый текст. Автору представилось естественным организовать эту работу таким образом, что в ней продолжаются все нумерации [29], в том числе нумерации глав, параграфов, определений, формул, утверждений и даже нумерации примечаний и библиографических ссылок.

Также формулы, понятия или символы, используемые в этой работе без пояснений, уже были введены и использовались в работах автора [27], [28], в части I [29], или считаются общепринятыми, или используются в замечательной книге Йе-ха [18] “Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing” (русский перевод “Теория множеств и метод форсинга”, М., 1973), содержащей многие базовые понятия и сведения и гораздо более того; поэтому они будут считаться известными и часто будут использоваться без пояснений.

Таким образом, читателю было бы удобнее предварительно ознакомиться с [29] и с основными понятиями и обозначениями этой работы хотя бы в общих чертах.

Во всяком случае, было бы полезно ознакомиться предварительно с планом всей этой работы и с кратким изложением предстоящего развития основных её идей в том виде, как он изложен в [29] на стр. 11–20.

Руководствуясь этими соображениями, читателю следует помнить, что все ссылки на предшествующие параграфы с номерами меньшими 7 относятся к части I [29], аналогично для ну-

мерации утверждений и т.д.

Что же касается содержания этой работы и технической стороны дела в целом, следует отметить, что она следует её предыдущему изданию [17] 2000 года, но более систематическим образом.

Также следует отметить, что в этом издании [17] и предшествующих работах автор стремился избежать использования личных авторских понятий и символики (кроме самых необходимых), так как он был обеспокоен трудностями и неприятием, которые они могут вызвать у читателя.

Однако восприятие этого предыдущего издания [17] читателями показало, что подобные опасения бесполезны, поэтому подобное использование неизбежно в любом случае.

Поэтому в настоящей работе автор предпринял иной подход и посчитал более естественным вовлечь всю систему его личных авторских понятий и определений в целом, которые он разрабатывал с 1976 года, так как она обладает технической и концептуальной выразительностью и ведёт непосредственно к сути дела, и, таким образом, было бы слишком искусственным избегать её использования (см. примечание 3 [29] в качестве примера). Как это обычно бывает, некоторые утверждения получили свои усиления; некоторые фрагменты, считавшиеся очевидными в предыдущих работах автора, получили свою детализацию; некоторые аргументы изменили своё расположение на более удобное; также иногда использованы некоторые удобные переобозначения.

Но что касается основных конструкций и рассуждений следует отметить, что данная работа следует изданию [17] 2000 года, но в более прояснённом виде. Основной результат этой работы таков: система

$$ZF + \exists k \text{ (} k \text{ слабо недостижимый кардинал)}$$

несовместна; все рассуждения проводятся в этой теории. Все

слабо недостижимые кардиналы становятся сильно недостижимыми в конструктивном классе L и поэтому рассуждения переносятся в стандартную счётную основную исходную модель

$$\mathfrak{M} = (L_{\chi^0}, \in, =)$$

теории

$$ZF + V = L + \exists k \text{ (} k \text{ слабо недостижимый кардинал),}$$

и далее k это наименьший недостижимый кардинал в \mathfrak{M} . В действительности в этой теории используются только формулы некоторой ограниченной длины; более того, счётность этой модели нужна только для некоторого технического удобства и можно обойтись без неё (см. “Введение” [29]). В этой модели \mathfrak{M} строятся так называемые матричные функции, обладающие несовместными свойствами монотонности и немонотонности; этим противоречием устанавливается

Основная теорема (ZF)

Не существует слабо недостижимых кардиналов.

Это влечёт несуществование сильно недостижимых кардиналов и несуществование всех других больших кардиналов. Эти матричные функции конструируются и рассматриваются посредством элементарного языка из формульных классов (см. определение 2.1 [29]) некоторого фиксированного уровня > 3 над стандартной моделью

$$(L_k, \in, =)$$

и затем все конструкции осуществляются посредством этого языка (если обратное не устанавливается контекстом).

В дополнение к этому в §12 приводятся некоторые простые следствия основной теоремы и некоторых хорошо известных результатов.

Глава II

Специальная теория: матричные функции

7 Матричные δ -функции

Здесь мы собираемся осуществить дальнейшее развитие идеи доказательства основной теоремы и модифицировать простейшие матричные функции $S_{\chi f}^{<\alpha_1}$ (см. определение 5.14 [29]) таким образом, чтобы их новые специальные варианты – так называемые α -функции – доставили требуемое противоречие: они будут обладать свойством \leq -монотонности и в то же время будут лишены этого свойства.

Напомним, что простейшие матричные функции, которые рассматривались в § 5 [29], обладают свойством монотонности, но оказалось, что непосредственное доказательство требуемого противоречия – доказательство их немонотонности – препятствуется следующим обстоятельством: некоторые существенные свойства нижних уровней универсума не распространяются до кардиналов скачка матриц на их носителях, которые являются значениями таких матричных функций.

С целью разрушить это препятствие мы снабдим такие матрицы их соответствующими диссеминаторами, и в результате простейшие матричные функции будут преобразованы в их более сложные формы, α -функции.

Однако непосредственное формирование этих функций представляется значительно усложнённым и некоторые важные их

особенности немотивированными.

Поэтому, чтобы представить их введение более прозрачным образом, мы предварительно предпримем *второе приближение* к идее доказательства основной теоремы и обратимся к их более простой форме, то есть к δ -функциям.

С этой целью мы применим результаты §6 [29] для $m = n + 1$ и фиксированного уровня $n > 3$, но понятие диссеминатора должно быть уточнено; все диссеминаторы в дальнейшем будут уровня $n + 1$ (см. определение 6.9 [29]).

Определение 7.1

Пусть

$$\gamma < \alpha < \alpha_1 \leq k.$$

1) Мы обозначаем через $\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha_1}(\gamma, \alpha)$ формулу:

$$SIN_{n-1}^{< \alpha_1}(\gamma) \wedge \forall \gamma' \leq \gamma (SIN_n^{< \alpha_1}(\gamma') \longrightarrow SIN_n^{< \alpha}(\gamma')) .$$

Если эта формула выполняется константами γ , α , α_1 , то мы будем говорить, что α сохраняет $SIN_n^{< \alpha_1}$ -кардиналы $\leq \gamma$ ниже α_1 .

Если S – это матрица на носителе α и её кардинал предскачка α_χ^\downarrow после χ сохраняет такие кардиналы, то мы также будем говорить, что S на α сохраняет эти кардиналы ниже α_1 .

2) Мы обозначаем через $\mathbf{K}_{n+1}^\exists(\chi, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$ следующую Π_{n-2} -формулу:

$$\begin{aligned} & \sigma(\chi, \alpha, S) \wedge Lj^{< \alpha}(\chi) \wedge \chi < \delta < \gamma < \alpha \wedge S \triangleleft \rho \leq \chi^+ \wedge \rho = \hat{\rho} \wedge \\ & \wedge SIN_n^{< \alpha_\chi^\downarrow}(\delta) \wedge SIN_{n+1}^{< \alpha_\chi^\downarrow}[\leq \rho](\delta). \end{aligned}$$

Здесь, напомним, Π_{n-2} -формула $\sigma(\chi, \alpha, S)$ означает, что S это сингулярная матрица на её носителе α , редуцированная к кардиналу χ (см. определение 5.7 [29]); δ это диссеминатор для S на α с базой данных ρ уровня $n+1$ (определение 6.9 [29]); верхние индексы $< \alpha_\chi^\downarrow$ означают ограничение формульных кванторов кардиналом предскачка α_χ^\downarrow (см. также определения 2.3, 5.9 [29]); $\hat{\rho}$ это замыкание ρ относительно функции пары; и $Lj^{<\alpha}(\chi)$ это Δ_1 -свойство насыщенности кардинала χ ниже α (см. определение 6.9 4) [29]):

$$\chi < \alpha \wedge SIN_{n-1}^{<\alpha}(\chi) \wedge \text{Srng}(\tilde{S}_n^{\text{sin} \triangleleft \chi}) \in B_\chi \wedge \sup \text{dom}(\tilde{S}_n^{\text{sin} \triangleleft \chi}) = \chi.$$

Мы обозначаем через $\mathbf{K}^{<\alpha_1}(\chi, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$ формулу:

$$\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha_1}(\gamma, \alpha_\chi^\downarrow) \wedge \mathbf{K}_{n+1}^{\exists \triangleleft \alpha_1}(\chi, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \wedge \alpha < \alpha_1.$$

3) Если эта формула выполняется константами $\chi, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S, \alpha_1$, то мы будем говорить, что $\chi, \delta, \alpha, \rho, S$ сильно допустимы для γ ниже α_1 .

Если некоторые из них фиксированы или подразумеваются контекстом, то мы будем говорить, что остальные также сильно недостижимы для них (и для γ) ниже α_1 .

4) Матрица S называется сильно диссеминаторной матрицей или, короче, δ -матрицей, сильно допустимой на носителе α для $\gamma = \gamma_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 , если она обладает некоторым диссеминатором $\delta < \gamma$ с базой ρ , сильно допустимым для них (также ниже α_1).

В каждом подобном случае δ -матрица обозначается общим символом δS или S .

Если $\alpha_1 = k$, или α_1 указывается в контексте, то верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ здесь и другие упоминания о α_1 опускаются. +

Далее вплоть до конца § 7 понятия допустимости и δ -матрицы будут рассматриваться как *сильные* понятия, поэтому термин “сильно” будет опускаться. Все матрицы будут считаться δ -матрицами; в качестве редуцирующего кардинала χ далее будет использоваться полный кардинал χ^* (см. определение 5.4 [29]) – если контекст не указывает на другой случай. Здесь следует обратить внимание на понятие насыщенности кардинала χ ниже α , то есть на Δ_1 -свойство $Lj^{<\alpha}(\chi)$; из леммы 5.5 [29] следует, что χ^* это кардинал, насыщенный ниже всякого $\alpha > \chi^*$, $\alpha \in SIN_{n-2}$.

Символ χ^* в обозначениях и написаниях формул будет часто опускаться для некоторой краткости.

Далее каждый ограничивающий кардинал α_1 будет принадлежать SIN_{n-2} и выполнять условие

$$\chi^* < \alpha_1 \leq k \wedge A_n^{<\alpha_1}(\chi^*) = \|u_n^{<\alpha_1}(\mathbb{L})\|, \quad (7.1)$$

или $\alpha_1 = k$ (если иное не предусмотрено контекстом).

Кардинал $\alpha_1 \leq k$ здесь с этим свойством будет называться *эквивинформативным* (равно информативным) с кардиналом χ^* .

Этот термин вводится здесь вот почему: в этом случае никакое Σ_n -утверждение $\varphi(\mathbb{L})$ не имеет *ординалов скачка* после χ^* ниже α_1 (см. определение 2.4 [29]). Нетрудно видеть, что это равносильно следующему: для всякого генерического расширения $\mathfrak{M}[l]$ каждое Π_n -утверждение $\varphi(l)$, которое выполняется в $\mathfrak{M}[l]$ ниже χ^* , выполняется также в этом расширении и ниже α_1 благодаря (7.1) и $\alpha_1 \in \Pi_{n-2}$; поэтому каждое Π_n -утверждение $\varphi(l)$ выполняется или нет в обоих случаях одновременно для каждого расширения $\mathfrak{M}[l]$ (см. также примечание 7 [29] для иллюстрации важности этого понятия).

Следует обратить внимание на важный пример такого кардинала: на кардинал предскачка $\alpha_{\chi^*}^{\downarrow}$ после χ^* для всякого

носителя матрицы $\alpha > \chi^*$. Кроме того, будет всегда полагаться для χ^* и α_1 , что

$$\forall \gamma < \alpha_1 \exists \gamma' \in [\gamma, \alpha_1[\text{ SIN}_n^{<\alpha_1}(\gamma') \wedge cf(\alpha_1) \geq \chi^{*+}$$

для удобства некоторых формульных преобразований.

Символы граничения $< \alpha_1$, $\triangleleft \alpha_1$ будут опускаться, как всегда, если $\alpha_1 = k$, или α_1 подразумевается контекстом.

Определение 7.2

Пусть $\chi^* < \alpha_1$.

1) Мы называем матричной δ -функцией уровня n ниже α_1 редуцированной к χ^* следующую функцию

$$\delta S_f^{<\alpha_1} = (\delta S_\tau^{<\alpha_1})_\tau,$$

принимая значения для τ :

$$\delta S_\tau^{<\alpha_1} = \min_{\underline{}} \{ S \triangleleft \chi^{*+} : \exists \delta, \alpha, \rho < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \mathbf{K}^{<\alpha_1}(\delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, S) \};$$

2) следующие сопровождающие ординальные функции определяются ниже α_1 :

$$\check{\delta}_f^{<\alpha_1} = (\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1})_\tau; \quad \rho_f^{<\alpha_1} = (\rho_\tau^{<\alpha_1})_\tau; \quad \alpha_f^{<\alpha_1} = (\alpha_\tau^{<\alpha_1})_\tau,$$

принимая значения:

$$\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1} = \min \{ \delta < \gamma_\tau^{<\alpha_1} : \exists \alpha, \rho < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \mathbf{K}^{<\alpha_1}(\delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, \delta S_\tau^{<\alpha_1}) \};$$

$$\rho_\tau^{<\alpha_1} = \min \{ \rho < \chi^{*+} : \exists \alpha < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \mathbf{K}^{<\alpha_1}(\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, \delta S_\tau^{<\alpha_1}) \};$$

$$\alpha_\tau^{<\alpha_1} = \min \{ \alpha < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} : \mathbf{K}^{<\alpha_1}(\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho_\tau^{<\alpha_1}, \delta S_\tau^{<\alpha_1}) \}.$$

Для каждой матрицы $\delta S_\tau^{<\alpha_1}$ эти функции определяют её производящий диссеминатор $\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1} < \gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе с его базой $\rho_\tau^{<\alpha_1}$ и её носителем $\alpha_\tau^{<\alpha_1}$. \dashv

Используя лемму 6.8 [29] легко видеть, что здесь $\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1}$ – это минимальный диссеминатор с базой

$$\rho_\tau^{<\alpha_1} = \hat{\rho}_1, \quad \rho_1 = Od(\delta S_\tau^{<\alpha_1}),$$

то есть замыканием ординала $Od(\delta S_\tau^{<\alpha_1})$ относительно функции пары; поэтому такой диссеминатор будет называться *производящим собственным диссеминатором матрицы* $\delta S_\tau^{<\alpha_1}$ на $\alpha_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 и обозначаться через $\check{\delta}_\tau^{S<\alpha_1}$ (см. также определение 6.9 2) [29]), а его база $\rho_\tau^{<\alpha_1}$ будет обозначаться через $\rho_\tau^{S<\alpha_1}$.

Нетрудно получить следующие леммы из этих определений и лемм 5.15, 5.16 [29]:

Лемма 7.3

Для $\alpha_1 < k$ формулы $\mathbf{K}_n^{\forall <\alpha_1}$, $\mathbf{K}^{<\alpha_1}$ принадлежат Δ_1 и поэтому все функции

$$\delta S_f^{<\alpha_1}, \quad \check{\delta}_f^{<\alpha_1}, \quad \rho_f^{<\alpha_1}, \quad \alpha_f^{<\alpha_1}$$

Δ_1 -определимы через χ^*, α_1 .

Для $\alpha_1 = k$ формулы \mathbf{K}_n^\forall , \mathbf{K} принадлежат Σ_n и эти функции Δ_{n+1} -определимы. \dashv

Лемма 7.4 (О абсолютности δ -функций)

Пусть $\chi^* < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} < \alpha_2 < \alpha_1 \leq k$, $\alpha_2 \in SIN_{n-2}^{<\alpha_1}$ и

$$(\gamma_\tau^{<\alpha_1} + 1) \cap SIN_n^{<\alpha_2} = (\gamma_\tau^{<\alpha_1} + 1) \cap SIN_n^{<\alpha_1},$$

тогда на множестве

$$\{\tau' : \chi^* \leq \gamma_{\tau'}^{<\alpha_2} \leq \gamma_\tau^{<\alpha_1}\}$$

функции

$$\delta S_f^{<\alpha_2}, \quad \check{\delta}_f^{<\alpha_2}, \quad \rho_f^{<\alpha_2}, \quad \alpha_f^{<\alpha_2}$$

тождественно совпадают соответственно с функциями

$$\delta S_f^{<\alpha_1}, \quad \check{\delta}_f^{<\alpha_1}, \quad \rho_f^{<\alpha_1}, \quad \alpha_f^{<\alpha_1}.$$

⊥

Следующая лемма и её доказательство демонстрируют идею, которая будет применяться далее в различных типичных ситуациях:

Лемма 7.5 (О диссеминаторе)

1) Пусть

$$(i) \quad]\tau_1, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\delta S_f^{<\alpha_1}), \quad \gamma_{\tau_2} \in SIN_n^{<\alpha_1};$$

$$(ii) \quad \tau_3 \in \text{dom}(\delta S_f^{<\alpha_1}), \quad \tau_2 \leq \tau_3;$$

$$(iii) \quad \check{\delta}_{\tau_3}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}.$$

Тогда

$$\check{\delta}_{\tau_3}^{<\alpha_1} \leq \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}.$$

2) Пусть δ -матрица S на её носителе α допустима для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе со своим диссеминатором δ и базой ρ ниже α_1 , тогда:

$$(i) \quad \{\tau' : \delta < \gamma_{\tau'}^{<\alpha_1} \leq \gamma_\tau^{<\alpha_1}\} \subseteq \text{dom}(\delta S_f^{<\alpha_1});$$

(ii) эта матрица S вместе с теми же δ, ρ обладает минимальным носителем $\alpha' \in]\gamma_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}[$, допустимым ниже α_1 .

Доказательство. 1) Верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ будут опускаться. Рассмотрим матрицу $S^3 = \delta S_{\tau_3}$ и $\check{\delta}^3 = \check{\delta}_{\tau_3}$, $\rho^3 = \rho_{\tau_3}$. Предположим, что 1) неверно, тогда по (iii)

$$\gamma_{\tau_1} < \check{\delta}^3 < \gamma_{\tau_2} \quad \text{и} \quad \check{\delta}^3 = \gamma_{\tau_4}$$

для некоторого $\tau_4 \in]\tau_1, \tau_2[$. Рассмотрим ситуацию ниже $\alpha^3 = \alpha_{\tau_3}^{\Downarrow}$, стоя на $\alpha^3 = \alpha_{\tau_3}^{\Downarrow}$. Из (i) и леммы 7.4 следует, что

$$\delta S_f^{<\alpha^3} \equiv \delta S_f \quad \text{на} \quad]\tau_1, \tau_2[$$

и матрица $S^4 = \delta S_{\tau_4}^{<\alpha^3} = \delta S_{\tau_4}$ на носителе $\alpha_{\tau_4}^{<\alpha^3} = \alpha_{\tau_4}$ имеет диссеминатор

$$\check{\delta}^4 = \check{\delta}_{\tau_4}^{<\alpha^3} = \check{\delta}_{\tau_4} < \gamma_{\tau_4} = \check{\delta}^3 \quad \text{с базой} \quad \rho^4 = \rho_{\tau_4}^{<\alpha^3}.$$

Теперь аргумент из доказательства леммы 6.6 [29] нужно повторить следующим образом. Из $\check{\delta}^4 < \check{\delta}^3$ вытекает, что

$$\rho^4 < \rho^3 \quad \text{и поэтому} \quad \check{\delta}^4 \notin SIN_{n+1}^{<\alpha^3}[< \rho_{\tau_3}],$$

тогда по лемме 6.6 [29] (для $m = n + 1$) существует некоторое Σ_n -предложение $\varphi(\alpha, \vec{a})$ с кортежем \vec{a} констант $< \rho_{\tau_3}$ и некоторый ординал $\alpha_0 \in [\check{\delta}^4, \alpha^3[$ такие, что

$$\forall \alpha < \alpha_0 \quad \varphi^{\triangleleft \alpha^3}(\alpha, \vec{a}) \wedge \neg \varphi^{\triangleleft \alpha^3}(\alpha_0, \vec{a}).$$

Диссеминатор $\check{\delta}^3$ ограничивает предложение $\exists \alpha \neg \varphi(\alpha, \vec{a})$ ниже α^3 , поэтому $\alpha_0 \in]\check{\delta}^4, \check{\delta}^3[$. Очевидно, Π_{n+1} -предложение

$$\forall \alpha, \gamma \left(\neg \varphi(\alpha, \vec{a}) \longrightarrow \exists \gamma_1 (\gamma < \gamma_1 \wedge SIN_{n-1}(\gamma_1) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \exists \delta < \alpha \quad \exists \alpha' \mathbf{K}(\delta, \gamma_1, \alpha', \rho^4, S^4)) \right)$$

выполняется ниже $\check{\delta}^3$ и, значит, $\check{\delta}^3$ продолжает его до α^3 , потому что

$$S^4 \triangleleft \rho_4 < \rho_3.$$

Следовательно, для каждого $\gamma_\tau^{<\alpha^3} > \check{\delta}^3$ появляется δ -матрица S^4 допустимая на некотором носителе

$$\alpha \in [\gamma_\tau^{<\alpha^3}, \alpha^3[\text{ для } \gamma_\tau^{<\alpha^3}$$

вместе со своим диссеминатором $\check{\delta}^4 < \check{\delta}^3$ и его базой ρ^4 . Отсюда следует, что ниже α^3 определяется *минимальный* кардинал $\check{\delta}^m$ и *минимальная* база ρ^m с этим свойством, то есть выполняющие следующее утверждение *ниже* α^3 :

$$\exists \gamma^m \forall \gamma > \gamma^m (SIN_{n-1}(\gamma) \rightarrow \exists \alpha', S \mathbf{K}(\check{\delta}^m, \gamma, \alpha', \rho^m, S)),$$

то есть существует $\gamma^m < \alpha^3$ такой, что для каждого $\gamma_\tau^{<\alpha^3} \in]\gamma^m, \alpha^3[$ существует некоторая δ -матрица S , допустимая на некотором носителе $\alpha \in [\gamma_\tau^{<\alpha^3}, \alpha^3[$ для $\gamma_\tau^{<\alpha^3}$ ниже α^3 вместе со своим производящим диссеминатором $\check{\delta}^m < \gamma^m$ с базой ρ^m .

Очевидно, $\check{\delta}^m < \check{\delta}^3$. Так как минимальное значение ρ^m определяется ниже α^3 , то по лемме 4.6 [29] о спектральном типе это влечёт

$$\rho^m < OT(\delta S_{\tau_3}) \leq Od(\delta S_{\tau_3}).$$

Но тогда это влечёт противоречие: существует δ -матрица S^m на некотором носителе $\alpha^m \in]\gamma_{\tau_3}, \alpha^3[$, допустимая для γ_{τ_3} вместе с диссеминатором $\check{\delta}^m < \gamma_{\tau_3}$ с базой ρ^m и по условию \mathbf{K}_{n+1}^\exists

$$S^m \triangleleft \rho^m < OT(\delta S_{\tau_3}) \leq Od(\delta S_{\tau_3}),$$

хотя δS_{τ_3} является \leq -минимальной по определению 7.2.

Утверждение 2) (i) повторяет лемму 5.17 2) (i) [29] и следует из определения 7.2 непосредственно; а утверждение 2) (ii) можно легко установить посредством аргумента доказательства леммы 5.17 2) (ii) [29] для матрицы S вместо $S_{\chi\tau}^{<\alpha_1}$ и для формулы \mathbf{K} вместо σ ; мы вернёмся к этому аргументу в § 8 в более важном случае. \dashv

Нерелятивизированная функция δS_f действительно определена на финальном подинтервале недостижимого кардинала k , как это показывает

Лемма 7.6 (Об определённости δ -функции)

Существует ординал $\delta < k$ такой, что δS_f определена на множестве

$$T = \{\tau : \delta < \gamma_\tau < k\}.$$

Минимальный из таких ординалов δ обозначается через δ^ , следующий за ним в SIN_n кардинал – через δ^{*1} ; также вводятся следующие соответствующие ординалы:*

$$\tau_1^* = \tau(\delta^*), \quad \tau^{*1} = \tau(\delta^{*1}),$$

$$\text{так что} \quad \delta^* = \gamma_{\tau_1^*}, \quad \delta^{*1} = \gamma_{\tau^{*1}},$$

$$\text{и} \quad \alpha^{*1} = \alpha_{\tau^{*1}}^\downarrow, \quad \rho^{*1} = \rho_{\tau^{*1}}.$$

Доказательство состоит в непосредственном применении леммы 6.14 [29] для $\alpha_1 = k$, $m = n + 1$, $\chi = \chi^*$. \dashv

Лемма 7.7

$$\delta^* \in SIN_n \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^{*1}} [< \rho^{*1}].$$

Доказательство. Рассмотрим диссеминатор $\check{\delta}_{\tau^*1}$ с базой ρ^{*1} матрицы δS_{τ^*1} на носителе α_{τ^*1} . Так как

$$\delta^{*1} \in SIN_n, \quad \check{\delta}_{\tau^*1} < \delta^{*1}$$

и

$$\check{\delta}_{\tau^*1} \in SIN_n^{<\alpha^{*1}} \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^{*1}} [< \rho^{*1}],$$

то лемма 3.8 [29] влечёт $\check{\delta}_{\tau^*1} \in SIN_n$ и по леммам 7.5 2), 7.6 $\check{\delta}_{\tau^*1} = \delta^*$. \dashv

Определение 7.8

1. Функция $\delta S_{\tau}^{<\alpha_1}$ называется монотонной на интервале $[\tau_1, \tau_2[$, или на соответствующем интервале $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ ниже α_1 , если $\tau_1 + 1 < \tau_2$, $]\tau_1, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1})$ и

$$\forall \tau', \tau'' (\tau_1 < \tau' < \tau'' < \tau_2 \longrightarrow \delta S_{\tau'}^{<\alpha_1} \leq \delta S_{\tau''}^{<\alpha_1}).$$

2. Соответственно этому функция δS_f называется (то-тально) монотонной, если для $\tau_1^* = \tau(\delta^*)$:

$$\forall \tau', \tau'' (\tau_1^* < \tau' < \tau'' < k \longrightarrow \delta S_{\tau'} \leq \delta S_{\tau''}).$$

\dashv

Некоторые простые фрагменты монотонности матричной функции δS_f следуют из определения 7.2 и леммы 7.5 2) (ii) немедленно:

Лемма 7.9 (О монотонности δ -функции)

Пусть

$$\tau_1 < \tau_2 \text{ и } \check{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}.$$

Тогда

$$\delta S_{\tau_1}^{<\alpha_1} \leq \delta S_{\tau_2}^{<\alpha_1}.$$

+

Обсудим возникшую ситуацию.

Мы видели выше, что простейшая матричная функция S_f является \leq -монотонной, но для каждого $\tau > \tau^*$ кардинал предскачка α^\Downarrow матрицы S_τ на её соответствующем носителе $\alpha \in]\gamma_\tau, \gamma_{\tau+1}[$ не сохраняет субнедостижимость уровней $\geq n$ кардиналов $\leq \gamma_\tau$, и некоторые другие важные свойства нижних уровней универсума также нарушаются при релятивизации к α^\Downarrow (см. леммы 5.17, 5.18 и их обсуждение в конце §5 [29]).

Чтобы преодолеть это препятствие мы снабдили значения этой функции, то есть матрицы S_τ , диссеминаторами уровня $n+1$ и потребовали сохранения субнедостижимости уровня n для кардиналов $\leq \gamma_\tau$, то есть мы перешли к δ -функции δS_f .

Но теперь это вызывает новое осложнение: теперь с помощью лемм 7.3-7.7 нетрудно видеть, что после этой модификации δ -функция δS_f лишается своего свойства \leq -монотонности на $[\tau_1^*, k[$, и именно благодаря тому, что во многих случаях кардиналы предскачков α^\Downarrow носителей δ -матриц α , наоборот, вызывают возникновение субнедостижимости уровня n некоторых кардиналов $\leq \gamma_\tau$, которые становятся субнедостижимыми (релятивизированно к α^\Downarrow), не являясь таковыми до этого (Киселев [13]).

Выход из этой новой затруднительной ситуации обнаруживается с помощью следующего явления, которое в дальнейшем предоставит решение всей проблемы:

А именно, можно видеть, что δ -матрица δS_{τ_0} , нарушающая

\leq -монотонность на $[\tau_1^*, k[$ впервые, то есть для

$$\tau_0 = \sup\{\tau : \delta S_f \text{ является } \leq\text{-монотонной на }]\tau_1^*, \tau[\},$$

помещается на некотором носителе $\alpha_{\tau_0} \in]\delta^*, \delta^{*1}[$ и $\delta S_{\tau_0} \triangleleft \rho^{*1}$ по лемме 3.2 [29].

Поэтому из лемм 7.7, 6.3 [29] (для $m = n + 1$, $\alpha_1 = \alpha^{*1}$) следует, что диссеминатор $\delta_{\tau^{*1}}$ переносит в точности ту же самую ситуацию, но ниже $\alpha^0 = \alpha_{\tau_0}^{\downarrow}$, то есть:

класс $SIN_n^{<\alpha^0}$ содержит некоторые кардиналы $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha^0} < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha^0}$ такие, что

$$]\tau_1, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\delta S_f^{<\alpha^0}),$$

и снова та же самая матрица

$$\delta S_{\tau_0} = \delta S_{\tau'_0}^{<\alpha^0}$$

нарушает монотонность $\delta S_f^{<\alpha^0}$ на $]\tau_1, \tau_2[$ впервые для некоторого ординала $\tau'_0 \in]\tau_1, \tau_2[$, но ниже α^0 .

Таким образом, здесь мы приходим к третьему и последнему приближению к главной идее:

Следующие требования необходимо наложить на δ -матрицы:
 1) они должны обладать свойством “самоисключения” в подобных ситуациях нарушения монотонности (будем называть его “свойством автоэкзорцизивности”); матрицы с этим свойством (матрицы “единичной характеристики”) должны иметь приоритет над другими матрицами (матрицами “нулевой характеристики” соответственно) в ходе определения матричной функции;

2) ещё одно требование должно быть наложено на матрицы нулевой характеристики, препятствуя их образованию: их

базы данных должны существенно возрастет, когда предшествующая часть матричной функции, которая уже определена, содержит нарушение монотонности, с целью скорректировать это нарушение – использование матрицы нулевой характеристики;

на этих основаниях матричная δ -функция должна получить несовместные свойства монотонности и немонотонности одновременно.

Очевидно, все эти соображения требуют рекурсивного определения матричной функции, определяя её значения в зависимости от свойств её предшествующих значений.

Мы начинаем осуществлять эту идею в следующем параграфе.

8 Матричные α -функции

Для предстоящего рекурсивного определения необходимо усложнить предыдущую формулу \mathbf{K}_{n+1}^\exists (определение 7.1). Но предварительно следует ввести некоторые субформулы для большей ясности конструкции этой формулы, где переменная X_1 играет роль матричной функции $\alpha S_f^{<\alpha}$, а переменная X_2 играет роль характеристической функции $a_f^{<\alpha}$, которые будут обе определены ниже α ; последняя функция будет приписывать соответствующие характеристики (единичные или нулевые) редуцированным матрицам, служащим значениями функции $\alpha S_f^{<\alpha}$; эти характеристики матриц на их носителях будут принимать значения единичное $a = 1$ или нулевое $a = 0$ соответственно принципу, обрисованному выше.

В ходе их введения эти формулы будут сопровождаться пояснениями их смысла, а после результирующего определения 8.2 мы опишем как оно действует в целом, без вхождения в детали.

Все эти формулы были использованы в предыдущих работах автора [10–17], но некоторые из них были рассеяны в тексте в их определённых формах (некоторые в неформализованном, некоторые другие в семантическом виде), и здесь они излагаются систематическим образом; также применяется несколько удобных переобозначений.

В этих формулах используются различные кардиналы из классов $SIN_n, SIN_{n-1}, SIN_{n-2}$ субнедостижимости. Необходимо иметь ввиду, что после $<-$ или \triangleleft -ограничения этих формул некоторым кардиналом α (см. определение 2.3 [29]) возникают субнедостижимые классы того же уровня, но релятивизированные к этому α ; например, SIN_n -субнедостижимость преобразуется в $SIN_n^{<\alpha}$ -субнедостижимость, но уже ниже α ; поэтому все формулы после этого повествуют о соответствующей ситуации ниже α .

Такие трансформации обеспечиваются определениями и леммами 3.3-3.8 [29].

Определение 8.1

Вводятся следующие вспомогательные формулы:

I. Интервалы определённости матричной функции:

1.0 $A_0(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1):$

$$\tau_1 + 1 < \tau_2 \wedge (X_1 \text{ is a function on }]\tau_1, \tau_2[) \wedge$$

$$\wedge \tau_1 = \min \{ \tau :]\tau, \tau_2[\subseteq \text{dom}(X_1) \} \wedge$$

$$\wedge \exists \gamma^1 (\chi \leq \gamma^1 = \gamma_{\tau_1} \wedge \text{SIN}_n(\gamma^1));$$

очевидно, эта формула означает, что интервал $[\tau_1, \tau_2[$ занимает особое место по отношению к матричной функции X_1 : эта функция определена на $] \tau_1, \tau_2[$ и τ_1 есть минимальный ординал с этим свойством, сверх того кардинал γ_{τ_1} принадлежит SIN_n ;

благодаря этой минимальности X_1 никогда не определена для этого ординала τ_1 .

1.1 $A_1(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1):$

$$A_0(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1) \wedge \exists \gamma^2 (\gamma^2 = \gamma_{\tau_2} \wedge \text{SIN}_n(\gamma^2));$$

такой интервал $[\tau_1, \tau_2[$, а также интервал $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$, будут называться интервалами определённости матричной функции X_1 максимальными влево (в $\text{dom}(X_1)$), максимальными в том смысле, что не существует интервала $] \tau', \tau_2[$ в $\text{dom}(X_1)$ с меньшим левым концом $\tau' < \tau_1$; сверх того по-прежнему требуется $\gamma_{\tau_1} \in \text{SIN}_n$, и ещё $\gamma_{\tau_2} \in \text{SIN}_n$.

1.2 $A_{1,1}^M(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1)$:

$$A_1(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1) \wedge \tau_2 = \sup \{ \tau : A_1(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1) \};$$

здесь интервал $]\tau_1, \tau_2[$ (включённый в $\text{dom}(X_1)$) – максимальный в том смысле, что он не включается ни в какой другой интервал $]\tau'_1, \tau'_2[\subseteq \text{dom}(X_1)$ такой, что $\gamma_{\tau'_2} \in \text{SIN}_n$; помимо этого по-прежнему требуется, чтобы $\gamma_{\tau_1} \in \text{SIN}_n$, $\gamma_{\tau_2} \in \text{SIN}_n$; по этой причине такой интервал $]\tau_1, \tau_2[$ и соответствующий интервал $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ будут называться максимальными интервалами определённости матричной функции X_1 .

1.3 $A_{1,2}(\tau_1, \tau_2, \eta)$:

$$\exists \gamma^1, \gamma^2 \left(\gamma^1 = \gamma_{\tau_1} \wedge \gamma^2 = \gamma_{\tau_2} \wedge \right. \\ \left. \wedge \eta = OT(\{ \gamma : \gamma^1 < \gamma < \gamma^2 \wedge \text{SIN}_n(\gamma) \}) \right);$$

здесь, напомним, OT обозначает порядковый тип указанного множества, поэтому мы будем называть такой ординал η типом интервала $]\tau_1, \tau_2[$ и также типом соответствующего интервала $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$.

1.4 $A_2(\chi, \tau_1, \tau_2, \tau_3, X_1)$:

$$A_1(\chi, \tau_1, \tau_3, X_1) \wedge \tau_1 + 1 < \tau_2 < \tau_3 \wedge \tau_2 = \\ = \sup \left\{ \tau < \tau_3 : \forall \tau', \tau'' (\tau_1 < \tau' < \tau'' < \tau \longrightarrow X(\tau') \leq X(\tau'')) \right\};$$

здесь τ_2 – это минимальный индекс, на котором нарушается \leq -монотонность матричной функции X_1 на интервале

$] \tau_1, \tau_3[$.

1.5 $A_3(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, X_1, X_2):$

$$A_2(\chi, \tau_1, \tau_2, \tau_3, X_1) \wedge \tau_1 < \tau'_1 < \tau_2 \wedge (X_2 \text{ это функция }] \tau_1, \tau_3[) \wedge$$

$$\wedge \tau'_1 = \min \{ \tau \in] \tau_1, \tau_2[: X_1(\tau) \geq X_1(\tau_2) \wedge X_2(\tau) = 1 \};$$

здесь указывается, что \leq -монотонность матричной функции X_1 на $] \tau_1, \tau_3[$ впервые нарушается на индексе τ_2 и именно из-за матрицы единичной характеристики $X_1(\tau'_1) \geq X_1(\tau_2)$ для $\tau'_1 \in] \tau_1, \tau_2[$.

1.6.a $A_4^b(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, \eta, X_1, X_2):$

$$A_3(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, X_1, X_2) \wedge A_{1.2}(\tau_1, \tau_3, \eta);$$

1.6.a(i) $A_4^b(\chi, \tau_1, \tau_2, \eta, X_1, X_2):$

$$\exists \tau'_1, \tau'_2 \leq \tau_2 \ A_4^b(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau'_2, \tau_2, \eta, X_1, X_2);$$

1.6.b $A_4^{Mb}(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, \eta, X_1, X_2):$

$$A_4^b(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, \eta, X_1, X_2) \wedge A_{1.1}^M(\chi, \tau_1, \tau_3, X_1);$$

1.6.b(i) $A_4^{Mb}(\chi, \tau_1, \tau_2, \eta, X_1, X_2):$

$$\exists \tau'_1, \tau'_2 \leq \tau_2 \ A_4^{Mb}(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau'_2, \tau_2, \eta, X_1, X_2);$$

в дальнейшем всякий интервал $] \tau_1, \tau_3[$, обладающий свойством A_4^b для некоторых τ'_1, τ_2, η и соответствующий интервал $] \gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_3}[$ будут называться блоками типа η , а если они вдобавок выполняют $A_{1.1}^M(\chi, \tau_1, \tau_3, X_1)$ – то максимальными блоками этого типа.

Такие блоки будут рассматриваться далее как неприемлимые по причине их фатального дефекта: нарушения монотонности матричной функции. По этой причине мы наложим на такие блоки некоторые обременительные требования с целью избежать их формирования в ходе определения матричной функции (см. условие \mathbf{K}^0 ниже).

Приостановим ненадолго это определение 8.1 чтобы пояснить смысл и направление развития его последующей части.

Формулы и понятия, введённые выше и последующие, будут использоваться в результирующем определении 8.2 в их релятивизированных формах, то есть их индивидуальные переменные и константы будут $<-$ или \triangleleft -ограничиваться некоторым соответствующим кардиналом α_1 . В подобных случаях используются их настоящие формулировки, но с добавленной ремаркой “ниже α_1 ”; соответственно их обозначения снабжаются верхним индексом $<\alpha_1$ или $\triangleleft\alpha_1$.

Таким образом,

$$A_1^{\triangleleft\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau_2, X_1)$$

это формула:

$$\tau_1 + 1 < \tau_2 \wedge (X_1 \text{ это функция на }]\tau_1, \tau_2[) \wedge$$

$$\wedge \tau_1 = \min \{ \tau :]\tau, \tau_2[\subseteq \text{dom}(X_1) \} \wedge$$

$$\wedge \exists \gamma^1, \gamma^2 (\chi \leq \gamma^1 \wedge \gamma^1 = \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \wedge \gamma^2 = \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \wedge$$

$$\wedge \text{SIN}_n^{<\alpha_1}(\gamma^1) \wedge \text{SIN}_n^{<\alpha_1}(\gamma^2)),$$

которая означает, что $] \tau_1, \tau_2[$ есть интервал из области определения функции X_1 с минимальным левым концом τ_1 , и

сверх того соответствующие кардиналы $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$ являются $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардиналами – и всё это ниже α_1 .

Соответственно этому,

$$A_4^{b\triangleleft\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, \eta, X_1, X_2)$$

это формула:

$$A_3^{\triangleleft\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, X_1, X_2) \wedge A_{1.2}^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_3, \eta)$$

которая означает, что $]\tau_1, \tau_3[$ и $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}[$ это *блоки* ниже α_1 типа η , то есть интервал $]\tau_1, \tau_3[$ является максимальным влево в $dom(X_1)$ и кардиналы $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ оба содержатся в $SIN_n^{<\alpha_1}$, и \leq -монотонность X_1 на $]\tau_1, \tau_3[$ нарушается впервые на индексе $\tau_2 \in]\tau_1, \tau_3[$ и именно по причине матрицы $X_1(\tau'_1) > X_1(\tau_2)$ *единичной* характеристики для некоторого $\tau'_1 \in]\tau_1, \tau_2[$ – и всё это ниже α_1 .

Нетрудно видеть, что все эти и последующие подобные ограниченные формулы содержаться в классе Δ_1^1 для каждого $\alpha_1 > \chi$, $\alpha_1 < k$, $\alpha_1 \in SIN_{n-2}$.

Но чтобы ввести последующие понятия наиболее прозрачным образом, удобно предварительно прояснить принцип, регулирующий приписывание характеристик матрицам на их носителях и взаимодействие этих характеристик между собой, так как характеристическая функция играет ведущую роль в рекурсивном определении 8.2 матричной функции ниже.

Итак, матрица S на её носителе α — и сам этот носитель α — будет получать *нулевую* характеристику $a = 0$, если она участвует в нарушении монотонности матричной функции в следующем смысле:

существует интервал определённости матричной функции

$$[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_\chi^\Downarrow}, \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_\chi^\Downarrow}[$$

ниже кардинала предскачка α_χ^\Downarrow после χ этого носителя α , где встречается *та же самая матрица* S как значение матричной

функции X_1 , но ниже α_χ^\downarrow :

$$X_1(\tau_2) = S$$

для индекса $\tau_2 \in]\tau_1, \tau_3[$, который является минимальным, нарушающим монотонность функции X_1 на $] \tau_1, \tau_3[$ ниже α_χ^\downarrow , то есть когда выполняется

$$A_2^{\triangleleft \alpha_\chi^\downarrow}(\chi, \tau_1, \tau_2, \tau_3, X_1).$$

И здесь наступает последнее уточнение этого понятия: вдобавок не должно существовать допустимых матриц для $\gamma_{\tau_1}^{\triangleleft \alpha_\chi^\downarrow}$ и все значения матричной функции X_1 на интервале $] \tau_1, \tau_2[$ ниже α_χ^\downarrow должны быть *единичной* характеристики:

$$\forall \tau (\tau_1 < \tau \leq \tau_2 \rightarrow X_2(\tau) = 1). \quad 9)$$

В противном случае S на α и сам α будут получать *единичную* характеристику $a = 1$.

И по ходу того, как матричная функция будет получать своё рекурсивное определение 8.2, матрицы единичной характеристики буду систематически получать *приоритет* над матрицами нулевой характеристики — чтобы избежать нарушение монотонности этой функции.

Естественно понимать понятие “приоритет” в следующем смысле: когда определяется некоторое значение $X_1(\tau)$ матричной функции X_1 и на такое значение представляются матрицы S^0 , S^1 нулевой и единичной характеристики, тогда именно матрица S^1 должна быть назначена значением $X_1(\tau)$.

Но не исключаются некоторые определённые случаи, когда матрицы нулевой характеристики будут отвергаться по некоторым другим причинам, когда *матрица нулевой характеристики* S на её носителе α будет запрещена к представлению на значение матричной функции; в каждом таком случае мы

будем говорить, что S на α *подавляется*.

Мы используем термин “подавление”, а не “отсутствие приоритета”, так как подобное подавление будет применяться только в специальных особых случаях в зависимости от расположения этого носителя α .

Итак, мы переходим к описанию случаев, когда действует подобное подавление нулевой характеристики.

Для этого следует отметить, что приведённые в этом определении 8.1 формулы должны использоваться следующим особым образом:

До сих пор в этих формулах 1.0–1.6 в (i) символы X_1, X_2 означали функции, определённые на ординалах.

Но для рекурсивного определения 8.2 матричной функции необходимо использовать функции, определённые на *парах* ординалов. Поэтому введём для такой функции X другую функцию

$$X[\alpha] = \{(\tau, \eta) : ((\alpha, \tau), \eta) \in X\},$$

так что

$$X(\alpha, \tau) = X[\alpha](\tau)$$

для каждой пары $(\alpha, \tau) \in \text{dom}(X)$.

Соответственно этому указанные формулы в определении 8.2 и последующие формулы будут часто использоваться для X_1, X_2 как функций

$$X_1[\alpha^0], X_2[\alpha^0],$$

где α^0 это некоторый ординал.

Теперь вернёмся к определению 8.1 чтобы сформулировать так называемое “условие подаления”, оно возникает в связи с покрытиями кардиналов блоками специального вида и для этого необходима следующая группа условий:

II. Условия подавления

2.1a. $A_{5.1}^{sc}(\chi, \gamma^m, \gamma, X_1, X_2)$:

$$\begin{aligned} & \gamma^m < \gamma \wedge \forall \gamma' \in [\gamma^m, \gamma[\exists \tau_1, \tau_2, \eta \left(\gamma^m \leq \gamma_{\tau_1} \leq \gamma' < \gamma_{\tau_2} \leq \gamma \wedge \right. \\ & \quad \left. \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau_1, \tau_2, \eta, X_1, X_2) \right) \wedge \\ & \wedge \forall \gamma^{m'} < \gamma^m \neg \forall \gamma'' \in [\gamma^{m'}, \gamma[\exists \tau'_1, \tau'_2, \eta' \left(\gamma^{m'} \leq \gamma_{\tau'_1} \leq \gamma'' < \gamma_{\tau'_2} \leq \gamma \wedge \right. \\ & \quad \left. \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau'_1, \tau'_2, \eta', X_1, X_2) \right); \end{aligned}$$

здесь указывается, что интервал $[\gamma^m, \gamma[$ с правым концом γ является объединением максимальных блоков и что его левый конец γ^m – минимальный с этим свойством; такое семейство блоков будет называться покрытием кардинала γ ; легко видеть, что при этом условии γ^m, γ являются SIN_n -кардиналами;

если опустить здесь правый конец γ , то получается следующее условие:

2.1b. $A_{5.1}^{sc}(\chi, \gamma^m, X_1, X_2)$:

$$\begin{aligned} & \forall \gamma' \geq \gamma^m \exists \tau_1, \tau_2, \eta \left(\gamma^m \leq \gamma_{\tau_1} \leq \gamma' < \gamma_{\tau_2} \wedge \right. \\ & \quad \left. \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau_1, \tau_2, \eta, X_1, X_2) \right) \wedge \\ & \wedge \forall \gamma^{m'} < \gamma^m \neg \forall \gamma'' \geq \gamma^{m'} \exists \tau'_1, \tau'_2, \eta' \left(\gamma^{m'} \leq \gamma_{\tau'_1} \leq \gamma'' < \gamma_{\tau'_2} \wedge \right. \\ & \quad \left. \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau'_1, \tau'_2, \eta', X_1, X_2) \right). \end{aligned}$$

Чтобы сформировать условия подавления продуктивным образом следует наложить следующие специальные условия на ординалы $\gamma^m < \gamma^* < \gamma, \eta^*$:

2.2. $A_{5.2}^{sc}(\chi, \gamma^m, \gamma^*, \eta^*, X_1, X_2)$:

$$A_{5.1}^{sc}(\chi, \gamma^m, \gamma^*, X_1, X_2) \wedge$$

$$\begin{aligned} \wedge \forall \tau_1, \tau_2, \eta \left(\gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau_2} \leq \gamma^* \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau_1, \tau_2, \eta, X_1, X_2) \rightarrow \eta < \eta^* \right) \wedge \\ \wedge \forall \eta < \eta^* \exists \gamma' < \gamma^* \forall \tau'_1, \tau'_2, \eta' \left(\gamma' < \gamma_{\tau'_2} \leq \gamma^* \wedge \right. \\ \left. \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau'_1, \tau'_2, \eta', X_1, X_2) \rightarrow \eta < \eta' \right); \end{aligned}$$

в подобном случае, когда $A_{5.2}^{sc}$ выполняется, мы будем говорить, что типы покрытия кардинала γ^* неубывают до η^* существенно; таким образом ординал η^* предельный;

2.3. $A_{5.3}^{sc}(\chi, \gamma^*, \gamma^1, \gamma, \eta^*, X_1, X_2)$:

$$\begin{aligned} \exists \tau_1, \tau \left(\gamma_{\tau_1} = \gamma^1 \wedge \gamma_{\tau} = \gamma \wedge A_4^b(\chi, \tau_1, \tau, \eta^*, X_1, X_2) \wedge \right. \\ \left. \forall \tau'_1, \tau'_2, \eta' \left(\gamma^* < \gamma_{\tau'_2} \leq \gamma^1 \wedge A_4^{Mb}(\chi, \tau'_1, \tau'_2, \eta', X_1, X_2) \rightarrow \right. \right. \\ \left. \left. \rightarrow \eta' = \eta^* \right) \right); \end{aligned}$$

теперь эти три условия следует собрать вместе в следующее

2.4. Условие подавляющего покрытия

$$A_{5.4}^{sc}(\chi, \gamma, \eta^*, X_1, X_2):$$

$$\begin{aligned} \exists \gamma^m, \gamma^*, \gamma^1 \left(\gamma^m < \gamma^* < \gamma^1 < \gamma \wedge \eta^* < \chi^+ \wedge \right. \\ A_{5.1}^{sc}(\chi, \gamma^m, \gamma^1, X_1, X_2) \wedge A_{5.2}^{sc}(\chi, \gamma^m, \gamma^*, \eta^*, X_1, X_2) \wedge \\ \left. \wedge A_{5.3}^{sc}(\chi, \gamma^*, \gamma^1, \gamma, \eta^*, X_1, X_2) \right); \end{aligned}$$

назовём покрытие γ , обладающее этим свойством, подавляющим покрытием для γ типа η^* ;

таким образом, эти три условия $A_{5.1}^{sc} - A_{5.3}^{sc}$ вместе означают, что покрытие кардинала γ разделяется на три части: его типы неубывают до ординала $\eta^* < \chi^+$ существенно слева от γ^* , затем они стабилизируются от γ^* до γ^1 , то есть

интервал $[\gamma^*, \gamma^1[$ покрыт максимальными блоками постоянного типа η^* , также существует блок $[\gamma^1, \gamma[$ того же типа $\eta^* < \chi^+$; очевидно, эти условия определяют ординалы $\gamma^m < \gamma^* < \gamma^1 < \gamma$, η^* единственным образом через γ (если они существуют);

2.5. $A_{5.5}^{sc}(\chi, \gamma, \eta^*, \alpha, X_1, X_2)$:

$$\forall \gamma' (\gamma \leq \gamma' < \alpha \rightarrow \exists \tau'_1, \tau'_2, \eta' (\gamma_{\tau'_1}^{\leq \alpha} \leq \gamma' < \gamma_{\tau'_2}^{\leq \alpha} \wedge$$

$$\wedge A_4^{Mb < \alpha}(\chi, \tau'_1, \tau'_2, \eta', X_1, X_2) \wedge \eta' \geq \eta^*));$$

здесь указывается, что интервал $[\gamma, \alpha[$ покрыт максимальными блоками ниже α типов $\eta' \geq \eta^*$.

Теперь следует интегрировать все эти условия в единое

2.6. Результирующее условие подавления

$$A_5^{S,0}(\chi, a, \gamma, \alpha, \rho, S, X_1^0, X_2^0, X_1, X_2):$$

$$a = 0 \wedge SIN_n(\gamma) \wedge \rho < \chi^+ \wedge \sigma(\chi, \alpha, S) \wedge$$

$$\wedge \exists \eta^*, \tau < \gamma (\gamma = \gamma_\tau \wedge A_{5.4}^{sc}(\chi, \gamma, \eta^*, X_1^0, X_2^0) \wedge$$

$$\wedge \forall \tau' (\tau < \tau' \wedge SIN_n(\gamma_{\tau'}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists \alpha', S' [\gamma_{\tau'} < \alpha' < \gamma_{\tau'+1} \wedge SIN_n^{< \alpha' \downarrow}(\gamma_{\tau'}) \wedge \sigma(\chi, \alpha', S') \wedge$$

$$\wedge A_{5.5}^{sc}(\chi, \gamma, \eta^*, \alpha' \downarrow, X_1[\alpha' \downarrow], X_2[\alpha' \downarrow]))];$$

это последнее условие накладывает на матрицу S на её носителе α тяжёлые требования, и если оно может быть

реализовано, то только в следующем очень особом случае: редуцированная матрица S должна иметь нулевую характеристику на носителе α , кардинал γ должен быть SIN_n -субнедостижим, база ρ должна быть строго меньше кардинала χ^+ , кардинал γ должен быть покрыт подавляющим покрытием типа η^* ; более того, для всех $\gamma' > \gamma$, $\gamma' \in SIN_n$ существуют носители $\alpha' > \gamma'$ с кардиналами предскачка $\alpha'_\chi{}^{\downarrow\downarrow}$, сохраняющими все SIN_n -кардиналы $\leq \gamma'$, и с интервалом $[\gamma, \alpha'_\chi{}^{\downarrow\downarrow}]$, покрытым максимальными блоками типов $\eta' \geq \eta^*$ ниже $\alpha'_\chi{}^{\downarrow\downarrow}$.

Далее такие случаи матрицы S нулевой характеристики на её носителе α будут систематически отвергаться в ходе определения матричной функции и поэтому мы будем говорить, что эта нулевая матрица S здесь на α подавляется для γ .

Соответственно, нулевая матрица S на α с диссеминатором δ и базой ρ не подавляется для γ , если это условие нарушается; следовательно, всякая матрица S на α не подавлена для γ , если она единичная, или имеет базу $\rho \geq \chi^+$ на α , или γ не SIN_n -кардинал; так что надо всегда иметь ввиду характеристику матрицы, её базу ρ и соответствующий кардинал γ .

Приостановим в последний раз ненадолго это определение 8.1 чтобы пояснить направление развития его финальной части; его суть состоит в обычной диагональной конструкции, вызывающей финальное противоречие.

Чтобы дальнейшая конструкция определения 8.2 матричной функции работала надлежащим образом, она должна руководствоваться Π_{n-2} -формулой

$$U_{n-2}(\mathbf{n}, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S),$$

универсальной для класса Π_{n-2} формул с указанными сво-

бодными переменными

$$x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S,$$

и переменным гёделевым номером \mathbf{n} таких формул в базовой модели \mathfrak{M} (см. Тарский [25], также Аддисон [23]).

Когда этот номер \mathbf{n} и переменная x примут определённое специальное значение \mathbf{n}^α одновременно:

$$\mathbf{n} = x = \mathbf{n}^\alpha,$$

тогда эта формула вместе с Σ_n -формулой $\mathbf{K}_n^\forall(\gamma, \alpha_\chi^\Downarrow)$ станут утверждать, что S – это α -матрица, редуцированная к χ на носителе α характеристики a с её диссеминатором δ и базой ρ , *допустимые* для γ и подчиняющиеся определённым рекурсивным условиям; напомним, что формула $\mathbf{K}_n^\forall(\gamma, \alpha)$ (определение 7.1) означает, что ординал α сохраняет все SIN_n -кардиналы $\leq \gamma$.

Однако до тех пор, пока значение \mathbf{n}^α не будет придано переменным \mathbf{n} , x , эта формула будет действовать в определении 8.2 при $\mathbf{n} = x$:

$$U_{n-2}(x, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S).$$

Также далее будут использоваться следующие функциональные ограничения:

$$X|\tau^0 = \{(\tau, \eta) \in X : \tau < \tau^0\};$$

$$X|^1\alpha^0 = \{((\alpha, \tau), \eta) \in X : \alpha < \alpha^0\}.$$

Теперь вернёмся к определению 8.1 в последний раз. Условие *неподавления* $\neg A_5^{S,0}$ будет действовать в следующей конъюнкции с формулой U_{n-2} , осуществляющей “несущую конструкцию” всего предстоящего определения:

III. Несущее условие

$$3.1 \quad U_{n-2}^*(\mathbf{n}, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S, X_1^0|\tau', X_2^0|\tau', X_1|^1\alpha^0, X_2|^1\alpha^0) :$$

$$U_{n-2}(\mathbf{n}, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \wedge \\ \wedge \neg A_5^{S,0}(\chi, a, \gamma, \alpha, \rho, S, X_1^0|\tau', X_2^0|\tau', X_1|^1\alpha^0, X_2|^1\alpha^0);$$

это условие в конъюнкции с формулой $\mathbf{K}_n^\forall(\gamma, \alpha_\chi^\downarrow)$ после их \triangleleft -ограничения кардиналом α^0 и для констант

$$x = \mathbf{n}^\alpha, \chi, \delta, \gamma, \alpha, \rho, \tau' < \alpha^0, S \triangleleft \rho$$

будет описывать следующую ситуацию ниже α^0 : S – это матрица, редуцированная к χ на её носителе α характеристики a , допустимая для γ вместе со своим диссеминатором δ и с базой ρ , которая неподавлена для γ ниже α^0 – и следует подчеркнуть, что эта ситуация для каждой пары (α^0, τ') будет определяться функциями

$$X_1^0|\tau' = X_1[\alpha^0]|\tau', \quad X_2^0|\tau' = X_2[\alpha^0]|\tau', \quad \text{и} \quad X_1[\alpha_\chi'^\downarrow], \quad X_2[\alpha_\chi'^\downarrow]$$

для различных $\alpha_\chi'^\downarrow < \alpha^0$ и определённых на меньших парах, поэтому рекурсивная конструкция, заданная этим условием, будет действовать корректно.

$$3.2 \quad A^0(x, \chi, \tau):$$

$$\exists \gamma \left(\gamma = \gamma_\tau \wedge \neg \exists a, \delta, \alpha, \rho, S (\mathbf{K}_n^\forall(\gamma, \alpha_\chi^\downarrow) \wedge \right. \\ \left. U_{n-2}(x, x, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \right);$$

это условие для $x = \mathbf{n}^\alpha$ будет означать, что нет α -матрицы S на некотором носителе α , допустимой для γ_τ .

$$3.3 \quad A_2^0(x, \chi, \tau_1, \tau_2, \tau_3, X_1):$$

$$A^0(x, \chi, \tau_1) \wedge A_2(\chi, \tau_1, \tau_2, \tau_3, X_1).$$

IV. Замыкающее условие

Это условие осуществит в дальнейшем замыкание диагонального рассуждения, устанавливающего финальное противоречие.

$$4.1 \quad \left(a = 0 \longrightarrow \forall \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' < \alpha^\downarrow_\chi [\gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_1} \leq \delta < \gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_3} \wedge \right.$$

$$\left. \wedge A_4^{Mb \leq \alpha^\downarrow_\chi}(\chi, \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', X_1[\alpha^\downarrow_\chi], X_2[\alpha^\downarrow_\chi]) \rightarrow \eta' < \rho \vee \rho = \chi^+ \right);$$

эта формула имеет вот какое содержание для нулевой матрицы S на носителе α с диссеминатором δ и базой ρ :

если этот диссеминатор попадает в максимальный блок $[\gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_1}, \gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_3}]$ ниже кардинала предскачка α^\downarrow_χ , то есть если

$$\gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_1} \leq \delta < \gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_3},$$

то эта база ρ должна существенно возрасти и превзойти тип η' этого самого блока, или даже принять максимальное возможное значение:

$$\eta' < \rho \vee \rho = \chi^+,$$

за неимением ничего лучшего;

поэтому в подобных случаях интервал $[\tau'_1, \tau'_3]$ и соответствующий интервал

$$[\gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_1}, \gamma^{\leq \alpha^\downarrow_\chi}_{\tau'_3}]$$

будут считаться “обременительными” для такой нулевой матрицы S с таким диссеминатором на носителе α и будут препятствовать образованию матрицы S на этом носителе (с этим диссеминатором δ).

V. Условие эквиинформативности

5.1 $A_6^e(\chi, \alpha^0)$:

$$\chi < \alpha^0 \wedge A_n^{\triangleleft \alpha^0}(\chi) = \|u_n^{\triangleleft \alpha^0}(\mathbb{L})\| \wedge SIN_{n-2}(\alpha^0) \wedge$$

$$\wedge \forall \gamma < \alpha^0 \exists \gamma_1 \in [\gamma, \alpha^0[\quad SIN_n^{< \alpha^0}(\gamma_1);$$

кардинал α^0 здесь с этим свойством называется, напомним, эквиинформативным с кардиналом χ .

⊥

Последнее понятие было использовано выше несколько раз (см. также [11–17], [29]) и здесь оно акцентируется по причине его особой важности: каждое Π_n -утверждение $\varphi(l)$ выполняется или нет в каждом генерическом расширении $\mathfrak{M}[l]$ ниже χ и также в этом же расширении ниже α^0 одновременно (см. комментарий после (7.1)); наилучший пример такого α^0 – это кардинал предскачка α_χ^\downarrow после χ любого матричного носителя $\alpha > \chi$ (если этот кардинал определен для класса $SIN_n^{< \alpha_\chi^\downarrow}$).

Теперь всё готово для того, чтобы собрать все введённые выше фрагменты вместе в следующем *интегрирующем* определении 8.2, где рассматривается переменная матрица S на её носителе α .

Требования, которые накладываются в нём на матрицу S на её носителе α и на её диссеминатор δ с базой ρ , зависят от функций X_i , $i = \overline{1, 5}$, которые уже будут рекурсивно определены ниже кардинала предскачка α_χ^\downarrow ; они будут заданы на определённом подмножестве множества

$$\begin{aligned} A_\chi^{\alpha_\chi^\downarrow} = \Big\{ (\alpha^0, \tau) : \exists \gamma < \alpha^0 (\chi < \gamma = \gamma_\tau^{< \alpha^0} \wedge \\ \wedge \alpha^0 \leq \alpha_\chi^\downarrow \wedge A_6^e(\chi, \alpha^0)) \Big\} \end{aligned} \quad (8.1)$$

и поэтому функции

$$X_i^0 = X_i[\alpha^0], \quad i = \overline{1, 5}$$

будут заданы на соответствующем подмножестве множества

$$\{\tau : \gamma_\tau \in SIN_{n-1}^{<\alpha^0}\}$$

для каждого кардинала $\alpha^0 \leq \alpha_\chi^\downarrow$ эквиинформативного с χ . Это множество $\mathcal{A}_\chi^{\alpha_\chi^\downarrow}$ полагается канонически упорядоченным (с α^0 как первой компонентой в этом упорядочении и с τ как второй).

Итак, переменная X_2^0 будет играть здесь роль характеристической функции (то есть функции характеристик) $a_f^{<\alpha^0}$, определённой ниже кардинала α^0 ; X_1^0 будет играть роль матричной функции $\alpha S_f^{<\alpha^0}$; X_3^0 – роль диссеминаторной функции (то есть функции диссеминаторов) $\tilde{\delta}_f^{<\alpha^0}$; X_4^0 – её базовой функции (то есть функции баз данных) $\rho_f^{<\alpha^0}$; X_5^0 – роль несущей функции (то есть функции носителей) $\alpha_f^{<\alpha^0}$; все они будут определены ниже α^0 .

После того, как все эти функции будут определены для всех таких кардиналов

$$\alpha^0 \leq \alpha_\chi^\downarrow$$

– тогда в заключение результирующее требование будет наложено на саму матрицу S на её носителе α вместе с её диссеминатором δ и базой данных ρ в зависимости от расположения этого δ , более точно – в зависимости от максимального блока

$$[\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha_\chi^\downarrow}, \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha_\chi^\downarrow}]$$

закрывающего в себе этот δ , который будет уже определён ниже $\alpha_{\chi}^{\downarrow}$.

Здесь, напомним, действует замыкающее требование, наложенное на матрицу S на её носителе α , упомянутое выше:

если S на α имеет нулевую характеристику и его допустимый диссеминатор δ попадает в максимальный блок типа η' ниже $\alpha_{\chi}^{\downarrow}$, то $\eta' < \rho \wedge \rho = \chi^+$; таким образом, в этом случае база данных ρ должна значительно возрасти и мы увидим, что это возможно, но всякий раз ведёт к противоречию.

Ещё здесь потребуется формулировка $Lj^{<\alpha}(\chi)$ понятия насыщенности кардинала χ (см. аргумент перед (7.1) или определение 6.9 4) [29]); напомним также, что $\hat{\rho}$ обозначает замыкание ρ относительно функции пары.

Итак, рекурсивное определение матричной функции, заданное на множестве $\mathcal{A}_{\chi}^{\alpha_{\chi}^{\downarrow}}$, начинается; после определения 8.4 мы покажем, как это рекурсивное определение действует: ¹⁰⁾

Определение 8.2

1) Пусть

$$U_{n-2}(\mathfrak{n}, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$$

это Π_{n-2} -формула, универсальная для класса Π_{n-2} , где \mathfrak{n} это переменный гёделев номер Π_{n-2} -формул со свободными переменными $x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S$, и пусть

$$U_{n-2}^*(x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S, X_1^0 | \tau', X_2^0 | \tau', X_1 |^1 \alpha^0, X_2 |^1 \alpha^0).$$

это формула

$$U_{n-2}(x, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \wedge \\ \wedge \neg A_5^{S,0}(\chi, a, \gamma, \alpha, \rho, S, X_1^0 | \tau', X_2^0 | \tau', X_1 |^1 \alpha^0, X_2 |^1 \alpha^0).$$

2) Пусть

$$A_7^{RC}(x, \chi, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \alpha_\chi^\Downarrow)$$

это следующая Δ_1 -формула, составляющая требуемое условие рекурсии:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{1 \leq i \leq 5} \left((X_i \text{ это функция}) \wedge X_i \triangleleft \alpha_\chi^{\Downarrow+} \wedge \right. \\ & \left. \wedge \text{dom}(X_i) \subseteq \left\{ (\alpha^0, \tau) : \exists \gamma < \alpha^0 (\chi < \gamma = \gamma_\tau^{\leq \alpha^0} \wedge \right. \right. \\ & \left. \left. \wedge \alpha^0 \leq \alpha_\chi^{\Downarrow} \wedge A_6^e(\chi, \alpha^0)) \right\} \right) \wedge \\ & \wedge \forall \alpha^0 \left((\alpha^0 \leq \alpha_\chi^{\Downarrow} \wedge A_6^e(\chi, \alpha^0)) \longrightarrow \right. \\ & \longrightarrow \exists X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0, X_5^0, X_1^{1,0}, X_2^{1,0} \left[\bigwedge_{1 \leq i \leq 5} X_i^0 = X_i[\alpha^0] \wedge \right. \\ & \left. \wedge X_1^{1,0} = X_1|^1 \alpha^0 \wedge X_2^{1,0} = X_2|^1 \alpha^0 \wedge \right. \\ & \left. \wedge \forall \tau', \gamma', \gamma'' < \alpha^0 \left(\chi < \gamma' \wedge \gamma' = \gamma_{\tau'}^{\leq \alpha^0} \wedge \gamma'' = \gamma_{\tau'+1}^{\leq \alpha^0} \longrightarrow \right. \right. \\ & \left. \forall a' \left(X_2^0(\tau') = a' \leftrightarrow \right. \right. \\ & \left. \left. \leftrightarrow a' = \max_{\leq} \left\{ a'' : \exists \delta'', \alpha'', \rho'' < \gamma'' \exists S'' \triangleleft \chi^+ (\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha^0}(\gamma', \alpha_\chi^{\Downarrow}) \wedge \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \wedge U_{n-2}^{*\triangleleft \alpha^0}(x, \chi, a'', \delta'', \gamma', \alpha'', \rho'', S'', X_1^0 | \tau', X_2^0 | \tau', X_1^{1,0}, X_2^{1,0})) \right\} \right) \right) \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge \forall S' \left(X_1^0(\tau') = S' \longleftrightarrow \exists a' \left(a' = X_2^0(\tau') \wedge \right. \right. \\
& \quad \wedge S' = \min_{\leq} \left\{ S'' \triangleleft \chi^+ : \exists \delta'', \alpha'', \rho'' < \gamma'' (\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha^0}(\gamma', \alpha''^{\Downarrow}) \wedge \right. \\
& \quad \left. \left. \wedge U_{n-2}^{* \triangleleft \alpha^0}(x, \chi, a', \delta'', \gamma', \alpha'', \rho'', S'', X_1^0|_{\tau'}, X_2^0|_{\tau'}, X_1^{1,0}, X_2^{1,0}) \right\} \right) \Big) \wedge \\
& \quad \wedge \forall \delta' \left(X_3^0(\tau') = \delta' \longleftrightarrow \exists a', S' \left(a' = X_1^0(\tau') \wedge S' = X_2^0(\tau') \wedge \right. \right. \\
& \quad \wedge \delta' = \min_{\leq} \left\{ \delta'' < \gamma' : \exists \alpha'', \rho'' < \gamma'' (\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha^0}(\gamma', \alpha''^{\Downarrow}) \wedge \right. \\
& \quad \left. \left. \wedge U_{n-2}^{* \triangleleft \alpha^0}(x, \chi, a', \delta'', \gamma', \alpha'', \rho'', S', X_1^0|_{\tau'}, X_2^0|_{\tau'}, X_1^{1,0}, X_2^{1,0}) \right\} \right) \Big) \wedge \\
& \quad \wedge \forall \rho' \left(X_4^0(\tau') = \rho' \longleftrightarrow \exists a', S', \delta' \left(a' = X_1^0(\tau') \wedge S' = X_2^0(\tau') \wedge \right. \right. \\
& \quad \wedge \delta' = X_3^0(\tau') \wedge \rho' = \min_{\leq} \left\{ \rho'' < \chi^+ : \exists \alpha'' < \gamma'' (\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha^0}(\gamma', \alpha''^{\Downarrow}) \wedge \right. \\
& \quad \left. \left. \wedge U_{n-2}^{* \triangleleft \alpha^0}(x, \chi, a', \delta', \gamma', \alpha'', \rho'', S', X_1^0|_{\tau'}, X_2^0|_{\tau'}, X_1^{1,0}, X_2^{1,0}) \right\} \right) \Big) \wedge \\
& \quad \wedge \forall \alpha' \left(X_5^0(\tau') = \alpha' \longleftrightarrow \exists a', S', \delta', \rho' \left(a' = X_1^0(\tau') \wedge S' = X_2^0(\tau') \wedge \right. \right. \\
& \quad \delta' = X_3^0(\tau') \wedge \rho' = X_4^0(\tau') \wedge \alpha' = \min_{\leq} \left\{ \alpha'' < \gamma'' : \mathbf{K}_n^{\forall < \alpha^0}(\gamma', \alpha''^{\Downarrow}) \wedge \right. \\
& \quad \left. \left. \wedge U_{n-2}^{* \triangleleft \alpha^0}(x, \chi, a', \delta', \gamma', \alpha'', \rho', S', X_1^0|_{\tau'}, X_2^0|_{\tau'}, X_1^{1,0}, X_2^{1,0}) \right\} \right) \Big) \Big).
\end{aligned}$$

3) Мы обозначаем через

$$\alpha \mathbf{K}_{n+1}^{\exists}(x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$$

Π_{n-2} -формулу, которая эквивалентна следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 & (a = 0 \vee a = 1) \wedge \sigma(\chi, \alpha, S) \wedge Lj^{<\alpha}(\chi) \wedge \chi < \delta < \gamma < \alpha \wedge \\
 & \wedge S \triangleleft \rho \leq \chi^+ \wedge \rho = \widehat{\rho} \wedge SIN_n^{<\alpha_\chi^\Downarrow}(\delta) \wedge SIN_{n+1}^{<\alpha_\chi^\Downarrow} [< \rho](\delta) \wedge \\
 & \wedge \forall \gamma < \alpha_\chi^\Downarrow \exists \gamma' \in [\gamma, \alpha_\chi^\Downarrow[SIN_n^{<\alpha_\chi^\Downarrow}(\gamma') \wedge cf(\alpha_\chi^\Downarrow) \geq \chi^+ \wedge \\
 & \wedge \exists X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \left\{ A_7^{RC}(x, \chi, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \alpha_\chi^\Downarrow) \wedge \right. \\
 & \left(a = 0 \longleftrightarrow \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 < \alpha_\chi^\Downarrow (A_2^{0 \triangleleft \alpha_\chi^\Downarrow}(\chi, \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, X_1[\alpha_\chi^\Downarrow]) \wedge \right. \\
 & \left. \wedge \forall \tau'' (\tau'_1 < \tau'' \leq \tau'_2 \rightarrow X_2[\alpha_\chi^\Downarrow](\tau'') = 1) \wedge X_1[\alpha_\chi^\Downarrow](\tau'_2) = S) \right) \wedge \\
 & \wedge \left(a = 0 \longrightarrow \forall \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' < \alpha_\chi^\Downarrow [\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha_\chi^\Downarrow} \leq \delta < \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha_\chi^\Downarrow} \wedge \right. \\
 & \wedge A_4^{Mb \triangleleft \alpha_\chi^\Downarrow}(\chi, \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', X_1[\alpha_\chi^\Downarrow], X_2[\alpha_\chi^\Downarrow]) \rightarrow \\
 & \left. \left. \rightarrow \eta' < \rho \vee \rho = \chi^+ \right] \right) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathbf{K}^0(\chi, a, \delta, \alpha, \rho)$ последний конъюнктивный член в больших фигурных скобках $\{ \ , \}$ в последней формуле, то есть замыкающее условие:

$$\begin{aligned}
 & \left(a = 0 \longrightarrow \forall \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' < \alpha_\chi^\Downarrow [\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha_\chi^\Downarrow} \leq \delta < \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha_\chi^\Downarrow} \wedge \right. \\
 & \wedge A_4^{Mb \triangleleft \alpha_\chi^\Downarrow}(\chi, \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', X_1[\alpha_\chi^\Downarrow], X_2[\alpha_\chi^\Downarrow]) \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \eta' < \rho \vee \rho = \chi^+] \rangle. \quad 11)$$

Функции $X_1[\alpha_\chi^\downarrow], X_2[\alpha_\chi^\downarrow]$ не упоминаются здесь в обозначении \mathbf{K}^0 для краткости, так как они определяются единственным образом в предшествующей части этой формулы $\alpha\mathbf{K}_{n+1}^\exists$.

4) Формула $\alpha\mathbf{K}_{n+1}^\exists$ – это Π_{n-2} -формула и поэтому она получает свой гёделев номер \mathbf{n}^α , то есть:

$$\alpha\mathbf{K}_{n+1}^\exists(x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \longleftrightarrow U_{n-2}(\mathbf{n}^\alpha, x, \chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S).$$

Присвоим значение \mathbf{n}^α переменной x здесь в этой эквивалентности и везде далее и соответственно этому символы \mathbf{n}^α, x будут опущены везде далее в обозначениях.

Мы обозначаем через $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$ следующую Δ_1 -формулу:

$$\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha_1}(\gamma, \alpha_\chi^\downarrow) \wedge \alpha\mathbf{K}_{n+1}^{\exists \triangleleft \alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \wedge \alpha < \alpha_1,$$

и, соответственно, через $\alpha\mathbf{K}^{* < \alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$ – формулу, которая получается из формулы $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}$ присоединением к ней конъюнктивного условия неподавления матрицы S на α для γ (см. определение 8.1 2.6), но ниже $\alpha_1 < k$ (это делалось выше в пунктах 2), 3) для $\alpha^0, \alpha_\chi^\downarrow$) – следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_n^{\forall < \alpha_1}(\gamma, \alpha_\chi^\downarrow) \wedge \alpha\mathbf{K}_{n+1}^{\exists \triangleleft \alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \wedge \alpha < \alpha_1 \wedge \\ & \wedge \neg \left(a = 0 \wedge SIN_n^{<\alpha_1}(\gamma) \wedge \rho < \chi^+ \wedge \sigma(\chi, \alpha, S) \wedge \right. \\ & \left. \wedge \exists X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \left(A_7^{RC}(\mathbf{n}^\alpha, \chi, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \alpha_1) \wedge \right. \right. \\ & \left. \wedge \exists \eta^*, \tau < \gamma \left(\gamma = \gamma_\tau^{<\alpha_1} \wedge A_{5.4}^{sc \triangleleft \alpha_1}(\chi, \gamma, \eta^*, X_1[\alpha_1]|\tau, X_2[\alpha_1]|\tau) \wedge \right. \right. \\ & \left. \left. \wedge \forall \tau' \left(\tau < \tau' \wedge SIN_n^{<\alpha_1}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha_1}) \rightarrow \right. \right. \end{aligned}$$

$$\exists \alpha', S' [\gamma_{\tau'}^{<\alpha_1} < \alpha' < \gamma_{\tau'+1}^{<\alpha_1} \wedge SIN_n^{<\alpha'_\chi}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha_1}) \wedge \sigma(\chi, \alpha', S') \wedge \\ \wedge A_{5.5}^{sc < \alpha_1}(\chi, \gamma, \eta^*, \alpha_\chi^{/\downarrow}, X_1[\alpha_\chi^{/\downarrow}], X_2[\alpha_\chi^{/\downarrow}]))];$$

здесь утверждается допустимость матрицы S на α , и сверх того — её неподдавленность для γ ниже α_1 . Таким образом, если $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}$ выполняется, но $\alpha\mathbf{K}^{*<\alpha_1}$ нарушается, то S на α допустима, но подавлена (всё это ниже α_1).¹²⁾

5) Если формула $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$ выполняется константами $\chi, a, \delta, \alpha, \gamma, \rho, S, \alpha_1$, то мы говорим, что $\chi, a, \delta, \alpha, \rho, S$ очень сильно допустимы для γ ниже α_1 . Если некоторые из них фиксированы или указываются в контексте, то мы говорим, что остальные очень сильно допустимы для них (и для γ) ниже α_1 . Соответственно, через

$$\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}(\chi, \gamma, \alpha, S)$$

будет обозначаться формула

$$\exists a, \delta, \rho < \gamma \alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$$

означающая, что S на α очень сильно допустима для γ ниже α_1 .

6) Матрица S называется автоэкзорцизивной или, коротко, α -матрицей характеристики a , очень сильно допустимой на носителе α для $\gamma = \gamma_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 , если она обладает на α некоторым диссеминатором $\delta < \gamma$ с базой ρ очень сильно допустимыми для них также ниже α_1 .

В каждом подобном случае α -матрица обозначается общим символом αS или S .

Если $a_1 = k$, или α_1 указывается в контексте, то верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ и другие упоминания о α_1 опускаются.

Далее все понятия допустимости полагаются очень сильными, поэтому термин “очень сильно” будет в дальнейшем опускаться. \dashv

Таким образом, ограниченная формула

$$\alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}(\chi, a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$$

возникает из формулы $\alpha \mathbf{K}^{<\alpha_1}$ посредством присоединения к ней условия неподавления матрицы S на α для γ ниже α_1 , которое получается из условия $\neg A_5^{S,0}$ описанным выше способом — \triangleleft -ограничением кардиналом α_1 (то есть \triangleleft -ограничением его индивидуальных переменных этим кардиналом и заменой его подформулы $SIN_n(\gamma)$ на $SIN_n^{<\alpha_1}(\gamma)$).

Соответственно, если матрица S на α *подавлена* для кардинала γ ниже α_1 , то γ — это $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардинал и S имеет *нулевую* характеристику на α и базу $\rho < \chi^+$ ниже α_1 .

Везде далее $\chi = \chi^* < \alpha_1$; мы будем часто опускать обозначения функций $X_1 = \alpha S_f^{<\alpha_1}$, $X_2 = a_f^{<\alpha_1}$ и символов χ^* , n^α в написаниях формул

$$A_0 - A_5^{S,0}, \quad A^0, \quad A_2^0, \quad \alpha \mathbf{K}_{n+1}^\exists, \quad \mathbf{K}^0, \quad \alpha \mathbf{K}^{<\alpha_1}, \quad \alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}$$

(из определений 8.1, 8.2) и других обозначений для некоторой краткости (если это не вызовет недоразумений); например, всякий кардинал предскачка $\alpha_{\chi^*}^\Downarrow$ будет обозначаться через α^\Downarrow и так далее.

Касательно этих формул следует отметить, что определение 8.2 было сформировано с целью получить ключевую формулу $\alpha \mathbf{K}_{n+1}^\exists$ из класса Π_{n-2} . Для этого все составляющие формулы были \triangleleft -ограничены кардиналами α^0 или α^\Downarrow .

Но в дальнейшем эти ограничения будут часто опускаться безо всякой потери содержания этих формул, потому что их индивидуальные переменные и константы будут в действительности ограничены указанными в контексте кардиналами в ходе их применения.

Очевидно, переменные X_i , $i = \overline{1, 5}$ задаются в определении 8.2 единственным образом через его параметры, поэтому такие

же функции можно рекурсивно определить той же рекурсией на таком же множестве пар (α_1, τ) (напомним множество (8.1))

$$\mathcal{A} = \{(\alpha_1, \tau) : \exists \gamma < \alpha^1(\chi^* < \gamma = \gamma_\tau^{<\alpha_1} \wedge A_6^e(\chi, \alpha_1))\}$$

упорядоченном как и выше канонически (с α_1 как первой компонентой в этом упорядочении и τ как второй).

Определение 8.3

Пусть $\chi^* < \alpha_1$.

1) Мы называем *характеристической функцией уровня n ниже α_1 редуцированной к χ^* следующую функцию*

$$a_f^{<\alpha_1} = (a_\tau^{<\alpha_1})_\tau,$$

принимаящую значения:

$$\begin{aligned} a_\tau^{<\alpha_1} = \\ = \max_{\leq} \{a : \exists \delta, \alpha, \rho < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \exists S \triangleleft \chi^{*+} \alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}(a, \delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, S)\}; \end{aligned}$$

2) мы будем называть *матричной автоэкзорцизивной (само-исключающей в нарушении монотонности) функцией или, короче, α -функцией уровня n ниже α_1 редуцированной к χ^* следующую функцию*

$$\alpha S_f^{<\alpha_1} = (\alpha S_\tau^{<\alpha_1})_\tau$$

принимаящую значения:

$$\begin{aligned} \alpha S_\tau^{<\alpha_1} = \\ = \min_{\leq} \{S \triangleleft \chi^{*+} : \exists \delta, \alpha, \rho < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}(a_\tau^{<\alpha_1}, \delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, S)\}; \end{aligned}$$

3) следующие сопрождающие ординальные функции определяются ниже α_1 :

$$\begin{array}{ll}
 \text{диссеминаторная функция} & \tilde{\delta}_f^{<\alpha_1} = (\tilde{\delta}_\tau^{<\alpha_1})_\tau, \\
 \text{базовая функция} & \rho_f^{<\alpha_1} = (\rho_\tau^{<\alpha_1})_\tau, \\
 \text{несущая функция} & \alpha_f^{<\alpha_1} = (\alpha_\tau^{<\alpha_1})_\tau, \\
 \text{производящая диссеминаторная} & \\
 \text{функция} & \check{\delta}_f^{<\alpha_1} = (\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1})_\tau,
 \end{array}$$

принимаяющие значения для $a_\tau = a_\tau^{<\alpha_1}$, $S_\tau = \alpha S_\tau^{<\alpha_1}$:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\delta}_\tau^{<\alpha_1} = \\
 & = \min_{\leq} \{ \delta < \gamma_\tau^{<\alpha_1} : \exists \alpha, \rho < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}(a_\tau, \delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, S_\tau) \};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_\tau^{<\alpha_1} = \\
 & = \min_{\leq} \{ \rho \leq \chi^{*+} : \exists \alpha < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} \alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}(a_\tau, \tilde{\delta}_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho, S_\tau) \};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_\tau^{<\alpha_1} = \\
 & = \min_{\leq} \{ \alpha < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} : \alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}(a_\tau, \tilde{\delta}_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha, \rho_\tau^{<\alpha_1}, S_\tau) \};
 \end{aligned}$$

и для $\alpha^1 = \alpha_\tau^{<\alpha_1^\downarrow}$:

$$\check{\delta}_\tau^{<\alpha_1} = \min_{\leq} \{ \delta < \gamma_\tau^{<\alpha_1} : SIN_n^{<\alpha_1}(\delta) \wedge SIN_{n+1}^{<\alpha_1} [<\rho_\tau^{<\alpha_1}] (\delta) \};$$

Значение $a_\tau^{<\alpha_1}$ называется, напомним, характеристикой матрицы $\alpha S_\tau^{<\alpha_1}$ на носителе $\alpha_\tau^{<\alpha_1}$ и самого этого носителя ниже α_1 .

Все функции

$$a_f^{<\alpha_1}, \quad \widetilde{\delta}_f^{<\alpha_1}, \quad \check{\delta}_f^{<\alpha_1}, \quad \rho_f^{<\alpha_1}$$

называются, для некоторой краткости, атрибутами функций

$$\alpha_f^{<\alpha_1}, \quad \alpha S_f^{<\alpha_1},$$

а их значения для индекса τ называются также атрибутами значений

$$\alpha_\tau^{<\alpha_1}, \quad \alpha S_\tau^{<\alpha_1};$$

аналогично функция $\alpha_f^{<\alpha_1}$ называется атрибутом функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$, а её значение $\alpha_\tau^{<\alpha_1}$ – атрибутом матрицы $\alpha S_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 , и так далее.

+

Понятие характеристики вводится в общем случае:

Определение 8.4

Мы называем характеристикой матрицы S на носителе $\alpha > \chi^*$ число $a(S, \alpha) = a$, определяемое следующим образом:

$$\begin{aligned} (a = 1 \vee a = 0) \wedge & \left(a = 0 \longleftrightarrow \right. \\ & \longleftrightarrow \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 < \alpha^\Downarrow \left(A_2^{0 \triangleleft \alpha^\Downarrow}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{<\alpha^\Downarrow}) \wedge \right. \\ & \left. \left. \wedge \forall \tau'' (\tau'_1 < \tau'' \leq \tau'_2 \rightarrow a_{\tau''}^{<\alpha^\Downarrow} = 1) \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{<\alpha^\Downarrow} = S \right) \right). \end{aligned}$$

Матрица S на её носителе α называется единичной матрицей на α , если она имеет единичную характеристику на α ; иначе она называется нулевой матрицей на α .

+

Таким образом, в ходе определения α -функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ приоритет отдаётся α -матрицам, обладающим большей характеристикой.

Это обстоятельство, хотя и позволяющее решить всю проблему больших кардиналов, существенно усложняет теорию матричных функций в целом, так как релятивизирующие рассуждения не работают теперь вполне свободно: ситуации, связанные с нулевой характеристикой могут не переноситься на нижние части универсума, например, определённые единичной характеристикой, или по другим причинам, связанным с подавлением.

Определение 8.3 α -функции и сопровождающих её ординальных функций следует рекурсивному определению 8.2 и так как функции X_i , $i = \overline{1, 5}$ определяются этой рекурсией в формуле $\alpha\mathbf{K}_{n+1}^\exists$ в её подформуле A_7^{RC} единственным образом через её параметры, то нетрудно видеть, что функции $X_i[\alpha^0]$, $i = \overline{1, 5}$, в определении 8.2 совпадают с соответствующими функциями

$$a_f^{<\alpha^0}, \quad \alpha S_f^{<\alpha^0}, \quad \tilde{\delta}_f^{<\alpha^0}, \quad \rho_f^{<\alpha^0}, \quad \alpha_f^{<\alpha^0}, \quad (8.2)$$

для каждого кардинала α^0 эквиинформативного с χ^* . По этой причине мы будем использовать их обозначения (8.2) вместо соответствующих обозначений этих функций $X_i[\alpha^0]$, $i = \overline{1, 5}$ в формулах из определения 8.1, то есть используя эти формулы, но для функций $X_i[\alpha^0]$, $i = \overline{1, 5}$, заменённых на соответствующие функции (8.2) для $\alpha^0 = \alpha_1$; мы даже будем опускать их для некоторой краткости, когда это не будет вызывать недоразумений и когда контекст будет очевидно на них указывать.

Например, формула $A_0^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1})$ означает, что ниже α_1 выполняется

$$\tau_1 + 1 < \tau_2 \wedge (\alpha S_f^{<\alpha_1} \text{ это функция на }]\tau_1, \tau_2[) \wedge$$

$$\wedge \tau_1 = \min\{\tau :]\tau, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge$$

$$\wedge \chi^* \leq \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \wedge \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \in SIN_n^{<\alpha_1};$$

формула $A_1^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1})$ означает, что ниже α_1 выполняется

$$A_0^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \in SIN_n^{<\alpha_1};$$

формула

$$A_2^{0<\alpha^\downarrow}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \alpha S_f^{<\alpha^\downarrow}) \wedge \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2] \ a_\tau^{<\alpha^\downarrow} = 1 \wedge \alpha S_{\tau_2}^{<\alpha^\downarrow} = S$$

означает, что здесь α^\downarrow – это кардинал предскачка носителя α после χ^* , и что не существует α -матрицы, допустимой для $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ ниже α^\downarrow , и ниже того же α^\downarrow выполняется

$$A_1^{<\alpha^\downarrow}(\tau_1, \tau_3, \alpha S_f^{<\alpha^\downarrow}),$$

и $\tau_2 \in]\tau_1, \tau_3[$ это первый ординал, на котором нарушается монотонность на $] \tau_1, \tau_3[$ матричной функции $\alpha S_f^{<\alpha^\downarrow}$ (но уже ниже α^\downarrow) и, более того, $\alpha S_{\tau_2}^{<\alpha^\downarrow} = S$ и все матрицы $\alpha S_\tau^{<\alpha^\downarrow}$ обладают единичной характеристикой на $] \tau_1, \tau_2]$ – и так далее. Теперь необходимо сделать следующие два простых замечания:

1. Все интервалы $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ определённости ниже α_1 , рассмотренные в определении 8.1 для функций

$$X_1 = \alpha S_f^{<\alpha_1}, \quad X_2 = a_f^{<\alpha_1},$$

были различных видов и были определены различными условиями, но все они включали условие максимальности интервала $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ влево:

$$A_0^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}),$$

которое утверждает, помимо прочего, что матричная функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ ниже α_1 определена на интервале $] \tau_1, \tau_2[$ и ординал τ_1 является *минимальным* с этим свойством и, более того, $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$

является $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардиналом. Благодаря этой минимальности нетрудно видеть, что эта функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ не определена для самого этого ординала τ_1 !

2. Понятия допустимости, приоритетности и подавления следует различать. Можно представить себе две матрицы S', S'' на их носителях α', α'' соответственно вместе с их соответствующими атрибутами, обе допустимые для единого кардила $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$; когда S' обладает единичной характеристикой на α' она всегда неподавлена и имеет приоритет над S'' нулевой характеристики на α'' . Но даже когда нет такой матрицы S' , всё-таки матрица S'' оп α'' может быть подавлена, если выполняется условие подавления $A_5^{S,0}$ ниже α_1 ; и в любом случае каждая подавленная матрица не может быть значением матричной функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$.

Таким образом, для интервала $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}]$, максимального влево ниже α_1 , не существует значения $\alpha S_\tau^{<\alpha_1}$ для $\tau = \tau_1$, но тем не менее это не исключает существования некоторой матрицы *только допустимой* (но подавленной) для $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ ниже α_1 .

А теперь, имея эти замечания ввиду, рассмотрим, как определение 8.2 – и, следовательно, определение 8.3 – работает ниже α_1 (мы рассматриваем, напомним, самый важный случай, когда $\chi = \chi^*$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}^\alpha$).

I. Итак, в его третьей части в начале формулы

$$\alpha \mathbf{K}_{n+1}^{<\alpha_1}(a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S)$$

утверждается, что S – это δ -матрица на её носителе $\alpha > \chi^*$, $\alpha < \alpha_1$, редуцированная к χ^* с диссеминатором $\delta < \gamma$ и базой ρ :

$$S \triangleleft \rho = \hat{\rho} \leq \chi^{*+};$$

кардинал предскачка $\alpha^\Downarrow = \alpha_{\chi^*}^\Downarrow$ является предельным для $SIN_n^{<\alpha^\Downarrow}$ и имеет конфинальность $\geq \chi^{*+}$; диссеминатор δ обладает субнедостижимостью ниже α^\Downarrow уровня n и даже уровня $n+1$ с базой ρ , то есть

$$\delta \in SIN_n^{<\alpha^\Downarrow} \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^\Downarrow} [< \rho].$$

II. Затем ниже α^\Downarrow определяются функции X_i , $i = \overline{1, 5}$ на парах $(\alpha^0, \tau') \in \mathcal{A}_{\chi^*}^{\alpha^\Downarrow}$, где кардиналы $\alpha^0 \in]\chi^*, \alpha^\Downarrow]$ эквиинформативны с χ^* и существуют кардиналы $\gamma_{\tau'}^{<\alpha^0}$. Все эти функции рекурсивно определяются через определение функций X_i^0 , $i = \overline{1, 5}$, посредством условия рекурсии A_7^{RC} из второй части определения 8.2:

$$X_1[\alpha^0] = \alpha S_f^{<\alpha^0}, \quad X_2[\alpha^0] = a_f^{<\alpha^0}, \quad X_3[\alpha^0] = \tilde{\delta}_f^{<\alpha^0},$$

$$X_4[\alpha^0] = \rho_f^{<\alpha^0}, \quad X_5[\alpha^0] = \alpha_f^{<\alpha^0}.$$

Цель этого определения – получить результирующую матричную функцию $\alpha S_f^{<\alpha^0}$, но первой определяется именно характеристическая функция

$$X_2^0 = X_2[\alpha^0] = a_f^{<\alpha^0}.$$

Эта функция принимает *максимальные* возможные значения, единичное или нулевое, которые являются характеристиками матриц, допустимых ниже α^0 , *но только не нулевую характеристику подавленных нулевых матриц* S'' на их носителях α'' , которые удовлетворяют условию своего подавления ниже α^0 :

$$A_5^{S, 0 \triangleleft \alpha^0}(0, \gamma_{\tau'}^{<\alpha^0}, \alpha'', \rho'', S'', X_1^0|\tau', X_2^0|\tau', X_1|{}^1\alpha^0, X_2|{}^1\alpha^0),$$

где функции здесь

$$X_1^0|\tau', \quad X_2^0|\tau', \quad X_1|{}^1\alpha^0, \quad X_2|{}^1\alpha^0$$

уже определены. И везде в дальнейшем такие подавленные нулевые матрицы систематически отвергаются.

После того, как характеристическая функция $X_2[\alpha^0] = a_f^{<\alpha^0}$ определена, все оставшиеся функции

$$X_1[\alpha^0], \quad X_i[\alpha^0], \quad i = \overline{3, 5}$$

определяются последовательно одна за другой посредством минимизации их допустимых и неподавленных значений.

Таким образом, следующей по очереди определяется матричная функция $X_1[\alpha^0] = \alpha S_f^{<\alpha^0}$, после этого соответствующая диссеминаторная функция $X_3[\alpha^0] = \tilde{\delta}_f^{<\alpha^0}$, затем базовая функция $X_4[\alpha^0] = \rho_f^{<\alpha^0}$, и в последнюю очередь определяется несущая функция $X_5[\alpha^0] = \alpha_f^{<\alpha^0}$.

При этом значения каждой из последующих из этих функций существенно зависят от значений предыдущих функций.

III. После того, как эти функции сформированы для всякого

$$\alpha^0 \in]\chi^*, \alpha^\Downarrow[,$$

это определение переходит к кардиналу

$$\alpha^0 = \alpha^\Downarrow$$

и здесь определяет характеристику самой матрицы S на её носителе α :

матрица S на α получает *нулевую характеристику*, когда она участвует в следующем нарушении монотонности матричной функции

$$X_1[\alpha^\Downarrow] = \alpha S_f^{<\alpha^\Downarrow}$$

ниже α^\Downarrow : когда ниже α^\Downarrow выполняется условие

$$\begin{aligned} \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 < \alpha^\Downarrow (A_2^{0 \triangleleft \alpha^\Downarrow}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{< \alpha^\Downarrow}) \wedge \\ \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] a_{\tau''}^{< \alpha^\Downarrow} = 1 \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{< \alpha^\Downarrow} = S); \end{aligned}$$

иначе S на α получает *единичную характеристику*.

IV. И в последнюю очередь это определение формирует *закрывающее условие* для S на α :

Если S – это *нулевая* матрица на α и её допустимый диссепинатор δ попадает в некоторый максимальный блок типа η' ниже α^\Downarrow

$$[\gamma_{\tau'_1}^{< \alpha^\Downarrow}, \gamma_{\tau'_3}^{< \alpha^\Downarrow}[$$

обременительный для S на α , то есть если выполняется

$$\gamma_{\tau'_1}^{< \alpha^\Downarrow} \leq \delta < \gamma_{\tau'_3}^{< \alpha^\Downarrow} \wedge A_4^{Mb \triangleleft \alpha^\Downarrow}(\tau'_1, \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', \alpha S_f^{< \alpha^\Downarrow}, a_f^{< \alpha^\Downarrow})$$

ниже α^\Downarrow , тогда требуется допустимая база данных ρ диссепинатора δ матрицы S на α , но только такая, что

$$\eta' < \rho \vee \rho = \chi^{*+}.$$

Таким образом, подобный случай *затрудняет* существенно использование такой матрицы S на α ; кроме того, S на α должна быть *неподавлена*; во всех других случаях никаких требований на матрицу S на α не накладывается.

Но напомним, что база $\rho = \chi^{*+}$ и каждая *единичная* матрица всегда допустимы и *неподавлены*; каждая матрица *неподавлена* для $\gamma \notin SIN_n$ в любом случае.

После этого определение 8.2 в четвёртой части формирует конъюнкцию $\alpha \mathbf{K}^{< \alpha_1}$:

$$\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha_1}(\gamma, \alpha^\Downarrow) \wedge \alpha \mathbf{K}_{n+1}^{\exists \triangleleft \alpha_1}(a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \wedge \alpha < \alpha_1$$

где дополнительно требуется, как обычно, что α^\Downarrow сохраняет все $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардиналы $\leq \gamma$ ниже α_1 ; и, наконец, возникает формула $\alpha\mathbf{K}^{*<\alpha_1}$, получающаяся из формулы $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}$ присоединением требования неподавления нулевой матрицы S на α ниже α_1 .

Так как определение 8.3 матричной α -функции и сопровождающих функций следует определению 8.2, то выполняется следующая очевидная лемма, которая в действительности повторяет это определение 8.2. Здесь используется понятие собственного порождающего диссеминатора $\check{\delta}^S$ для произвольной матрицы S на носителе α , который, напомним, является минимальным допустимым диссеминатором для S на α с минимальной допустимой базой $\rho^S = \hat{\rho}_1$, $\rho_1 = Od(S)$ (см. [29], [17]).

Лемма 8.5

Пусть S – произвольная α -матрица, редуцированная к χ^ и характеристики a на носителе $\alpha \leq \alpha_1$, допустимая для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе с её диссеминатором $\check{\delta}$, производящим диссеминатором $\check{\delta}$ с базой ρ и порождающим собственным диссеминатором $\check{\delta}^S$ ниже α_1 , тогда для кардинала предскачка α^\Downarrow после χ^* ниже α_1 выполняется:*

- 1) $\forall \gamma \leq \gamma_\tau^{<\alpha_1} (SIN_n^{<\alpha_1}(\gamma) \longrightarrow SIN_n^{<\alpha^\Downarrow}(\gamma))$;
- 2) $\chi^* < \check{\delta} < \gamma_\tau^{<\alpha_1} < \alpha^\Downarrow \wedge S \triangleleft \rho \leq \chi^{*+} \wedge \rho = \hat{\rho}$;
- 3) $\check{\delta} \in SIN_n^{<\alpha^\Downarrow} \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^\Downarrow} [< \rho]$; аналогично для $\check{\delta}$;
- 4) $\sup SIN_n^{<\alpha^\Downarrow} = \alpha^\Downarrow \wedge cf(\alpha^\Downarrow) \geq \chi^{*+}$;

$$5) \quad a = 0 \longleftrightarrow \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 \left(A_2^{0 \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] \quad a_{\tau''}^{< \alpha^\downarrow} = 1 \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{< \alpha^\downarrow} = S \right);$$

$$6) \quad a = 0 \longrightarrow \forall \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' [\gamma_{\tau'_1}^{< \alpha^\downarrow} \leq \tilde{\delta} < \gamma_{\tau'_3}^{< \alpha^\downarrow} \wedge$$

$$\wedge A_4^{Mb \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}, a_f^{< \alpha^\downarrow}) \longrightarrow \eta' < \rho \vee \rho = \chi^{*+}];$$

$$7) \quad (i) \quad \check{\delta}^S \leq \check{\delta} \leq \tilde{\delta} < \gamma_\tau^{< \alpha_1};$$

(ii) если $\tilde{\delta}$ это минимальный плавающий диссеминатор матрицы S на α с минимальной базой ρ , допустимые для $\gamma_\tau^{< \alpha_1}$ вместе с ρ , тогда:

$$a = 1 \longrightarrow \tilde{\delta} = \check{\delta}^S \wedge \rho = \rho^S = \hat{\rho}_1, \wedge \rho_1 = Od(S),$$

то есть когда S это единичная матрица на α , тогда $\tilde{\delta}$ это производящий собственный диссеминатор $\check{\delta}^S$ матрицы S на α с базой ρ^S ;

8) существует минимальный носитель $\alpha' < \gamma_{\tau+1}^{< \alpha_1}$ матрицы S той же характеристики a , допустимые для $\gamma_\tau^{< \alpha_1}$ вместе с теми же своими атрибутами $\tilde{\delta}$, ρ ниже α_1 :

$$\gamma_\tau^{< \alpha_1} < \alpha' < \gamma_{\tau+1}^{< \alpha_1};$$

аналогично для неподавленности S для γ_τ вместе с теми же атрибутами.

Доказательство. Осталось доказать последние два утверждения; верхний индекс $< \alpha_1$ часто будет опускаться.

Итак, рассмотрим матрицу S характеристики a на её носителе $\alpha < \alpha_1$, допустимую для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе с её диссеминатором $\tilde{\delta}$ и базой ρ . Утверждение 7) (i) очевидно; переходя к 7) (ii) предположим $a = 1$, тогда база

$$\rho = \rho^S = \hat{\rho}_1, \quad \rho_1 = Od(S)$$

вместе с минимальным диссеминатором

$$\check{\delta}^S \in SIN_n^{<\alpha^\Psi} \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^\Psi} [< \rho^S]$$

очевидно выполняет все требования условия

$$\alpha \mathbf{K}(a, \check{\delta}^S, \gamma, \alpha, \rho^S, S)$$

вплоть до последнего её конъюнктивного члена \mathbf{K}^0 .

Но последнее выполняется тоже, так как для $a = 1$ его посылка нарушается.

Таким образом, вся формула $\alpha \mathbf{K}$ выполняется и $\tilde{\delta} = \check{\delta}^S$, $\rho = \rho^S$.

Обращаясь к доказательству 8) легко применить лемму 3.2 [29] об ограничении, как это было сделано в доказательстве леммы 5.17 2) (ii). Однако подобное применение составляет типичное рассуждение, которое будет использоваться далее в различных важных случаях, поэтому следует представить его себе в деталях.

Во-первых, выше предполагается, что α_1 – предельный кардинал для класса $SIN_{n-1}^{<\alpha_1}$ (напомним также соглашение после (7.1)), поэтому $\gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}$ всегда существует для каждого $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$. Далее, предположим, что матрица S с диссеминатором δ и базой ρ на носителе

$$\alpha \in]\gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha_1[$$

допустимы для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 , тогда выполняется следующее утверждение $\varphi(\chi^*, \delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \rho, S)$:

$$\exists \alpha' (\gamma_\tau^{<\alpha_1} < \alpha' \wedge \alpha \mathbf{K}(\delta, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha', \rho, S))$$

ниже α_1 , то есть после его \triangleleft -ограничения кардиналом α_1 . Само это утверждение φ содержится в классе Σ_n , так как оно включает в себя Σ_n -формулу \mathbf{K}_n^\forall . Но рассмотрим кардинал

$$\gamma_{\tau^n} = \sup \{ \gamma \leq \gamma_\tau^{<\alpha_1} : \gamma \in SIN_n^{<\alpha_1} \};$$

по лемме 3.4 [29] γ_{τ^n} также принадлежит классу $SIN_n^{<\alpha_1}$. Теперь заменим в формуле $\alpha\mathbf{K}$ её подформулу \mathbf{K}_n^\forall Δ_1 -формулой

$$SIN_n^{<\alpha^\downarrow}(\gamma_{\tau^n}),$$

тогда Σ_n -формула $\alpha\mathbf{K}$ преобразуется в некоторую Π_{n-2} -формулу, которую обозначим через $\alpha\mathbf{K}_{n-2}$. Соответственно, формула φ преобразуется в некоторую Σ_{n-1} -формулу $\varphi_{n-2}(\chi^*, \delta, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \rho, S)$:

$$\exists \alpha' (\gamma_\tau^{<\alpha_1} < \alpha' \wedge \alpha\mathbf{K}_{n-2}(\delta, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha', \rho, S))$$

в точности того же содержания ниже α_1 , и поэтому выполняется

$$\varphi_{n-2}^{<\alpha_1}(\chi^*, \delta, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \rho, S).$$

Последнее предложение содержит индивидуальные константы

$$\chi^*, \delta, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \rho, S$$

строго меньшие $SIN_{n-1}^{<\alpha_1}$ -кардинала $\gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}$ и, следовательно, этот кардинал ограничивает это предложение по лемме 3.2 [29] (где n заменено на $n-1$), то есть выполняется утверждение

$$\exists \alpha' \in [\gamma_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}[\quad \alpha\mathbf{K}_{n-2}^{<\alpha_1}(\delta, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha', \rho, S)$$

и S получает свой носитель $\alpha' \in [\gamma_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}[$, допустимый для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе с теми же диссеминатором и базой данных.

Утверждение 8) о неподавленности не будет использоваться до §11 и там мы вернёмся к нему ещё раз.

⊥

Нетрудно видеть, что введённые в определении 8.3 функции обладают многими простыми свойствами δ -функций и её сопровождающих функций, поэтому доказательства следующих трёх лемм вполне аналогичны доказательствам лемм 7.3, 7.4 (или лемм 5.16, 5.15 [29]) и леммы 7.5:

Лемма 8.6

Для $\alpha_1 < k$ формулы $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}$, $\alpha\mathbf{K}^{*<\alpha_1}$ принадлежат Δ_1 и поэтому все функции из определения 8.3:

$$a_f^{<\alpha_1}, \quad \alpha S_f^{<\alpha_1}, \quad \tilde{\delta}_f^{<\alpha_1}, \quad \rho_f^{<\alpha_1}, \quad \alpha_f^{<\alpha_1}, \quad \check{\delta}_f^{<\alpha_1}$$

Δ_1 -определимы через χ^*, α_1 . Для $\alpha_1 = k$ формула $\alpha\mathbf{K}$ принадлежит Σ_{n+1} .

⊥

Лемма 8.7 (Об абсолютности α -функций)

Пусть $\chi^* < \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1} < \alpha_2 < \alpha_1 \leq k$, $\alpha_2 \in SIN_{n-2}^{<\alpha_1}$ и

$$(\gamma_{\tau}^{<\alpha_1} + 1) \cap SIN_n^{<\alpha_2} = (\gamma_{\tau}^{<\alpha_1} + 1) \cap SIN_n^{<\alpha_1},$$

1) тогда на множестве

$$T = \{\tau' : \chi^* \leq \gamma_{\tau'}^{<\alpha_2} \leq \gamma_{\tau}^{<\alpha_1}\}$$

допустимость ниже α_2 равносильна допустимости ниже α_1 : для всякого $\tau' \in T$ и матрицы S' на её носителе $\alpha' \in]\gamma_{\tau'}^{<\alpha_2}, \gamma_{\tau'+1}^{<\alpha_1}[$

$$\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_2}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha_2}, \alpha', S') \leftrightarrow \alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha_2}, \alpha', S');$$

2) на множестве

$$\{\tau' : \chi^* \leq \gamma_{\tau'}^{<\alpha_2} \leq \gamma_{\tau}^{<\alpha_1} \wedge (a_{\tau'}^{<\alpha_2} = 1 \vee \neg SIN_n^{<\alpha_2}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha_2}))\}$$

функции (8.2) ниже $\alpha^0 = \alpha_2$ тождественно совпадают соответственно с функциями (8.2) ниже $\alpha^0 = \alpha_1$.

⊥

Лемма 8.8 (О диссеминаторе)

1) Пусть

$$(i) \quad]\tau_1, \tau_2[\subseteq dom(\alpha S_f^{<\alpha_1}), \quad \gamma_{\tau_2} \in SIN_n^{<\alpha_1};$$

$$(ii) \quad \tau_3 \in dom(\alpha S_f^{<\alpha_1}), \quad \tau_2 \leq \tau_3;$$

$$(iii) \quad \tilde{\delta}_{\tau_3}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \quad \text{и} \quad a_{\tau_3}^{<\alpha_1} = 0.$$

Тогда

$$\tilde{\delta}_{\tau_3}^{<\alpha_1} \leq \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}.$$

Аналогично для $\check{\delta}_{\tau_3}^{<\alpha_1}$.

2) Пусть α -матрица S характеристики a на носителе α допустима для $\gamma_{\tau}^{<\alpha_1}$ вместе с её диссеминатором $\tilde{\delta}$ и базой ρ ниже α_1 , тогда

$$\{\tau' : \tilde{\delta} < \gamma_{\tau'}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau}^{<\alpha_1}\} \subseteq dom(\alpha S_f^{<\alpha_1}).$$

Доказательство 1) Предстоящее рассуждение аналогично доказательству леммы 7.5 1), но теперь некоторые специальные свойства диссеминаторов матриц единичной или нулевой характеристики вызывают особые обстоятельства. Поэтому здесь следует использовать следующий аргумент, который будет использоваться в дальнейшем в различных типичных ситуациях; верхние индексы $< \alpha_1$, $\triangleleft \alpha_1$ будут опускаться для краткости. Предположим, что 1) нарушается; рассмотрим матрицу $S^3 =$

αS_{τ_3} характеристики $a^3 = a_{\tau_3} = 0$ на носителе α_{τ_3} с кардиналом предскачка $\alpha^3 = \alpha_{\tau_3}^{\downarrow}$, обладающую диссеминаторами $\check{\delta}^3 = \check{\delta}_{\tau_3}$, $\tilde{\delta}^3 = \tilde{\delta}_{\tau_3}$ с базой $\rho^3 = \rho_{\tau_3}$, и предположим что

$$\gamma_{\tau_1} < \tilde{\delta}^3 < \gamma_{\tau_2}. \quad (8.3)$$

Здесь следует иметь ввиду минимальный ординал τ_1 , выполняющий условие (i).

По определению 8.3 выполняется утверждение $\alpha \mathbf{K}$ и поэтому выполняется утверждение \mathbf{K}^0 :

$$\begin{aligned} a^3 = 0 \longrightarrow \forall \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' < \alpha^3 \left[\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha^3} \leq \tilde{\delta}^3 < \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha^3} \wedge \right. \\ \left. \wedge A_4^{Mb < \alpha^3}(\tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', \alpha S_f^{<\alpha^3}, a_f^{<\alpha^3}) \longrightarrow \eta' < \rho^3 \vee \rho^3 = \chi^{*+} \right]. \end{aligned}$$

Предположим, что существуют ординалы $\tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' < \alpha^3$, выполняющие посылку этого утверждения:

$$\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha^3} \leq \tilde{\delta}^3 < \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha^3} \wedge A_4^{Mb < \alpha^3}(\tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', \alpha S_f^{<\alpha^3}, a_f^{<\alpha^3}). \quad (8.4)$$

Следует отметить снова, что благодаря $A_4^{Mb < \alpha^3}$ эти ординалы определяются через $\tilde{\delta}^3, \alpha^3$ единственным образом. Так как $\gamma_{\tau_2} \in SIN_n$ и γ_{τ_1} минимален, то можно видеть, что из предположения (8.3) следует

$$\gamma_{\tau'_1} < \tilde{\delta}^3 = \tilde{\delta}_{\tau_3} < \gamma_{\tau_2} \quad (8.5)$$

как результат минимизации диссеминатора $\tilde{\delta}_{\tau_3}$ в интервале $[\gamma_{\tau'_1}, \gamma_{\tau_2}[$ согласно определению 8.3. Теперь мы приходим к ситуации из доказательства леммы 7.5 1) и остаётся повторить его аргументы, то есть использовать \leq -минимальную матрицу $S^m \leq S^3$ на некотором носителе $\alpha^m \in]\gamma_{\tau_3}, \alpha^3[$ характеристики a^m , допустимую и неподавленную для γ_{τ_3} вместе

со своим минимальным диссеминатором $\tilde{\delta}^m < \gamma_{\tau_2}$ и базой $\rho^m < Od(S^3)$, потому что подавленность матрицы S^m для γ_{τ_3} влечёт подавленность самой матрицы S^3 для γ_{τ_3} , хотя она неподавлена по определению (ниже α_1).

Это вызывает противоречие: так как $S^m < S^3$ и $a^3 = 0$, то по определению 8.3 матрица S^3 не может быть минимальным значением αS_{τ_3} .

Если же таких ординалов $\tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta'$ нет, то утверждение \mathbf{K}^0 очевидно сохраняется при минимизации диссеминатора $\tilde{\delta}_{\tau_3}$ в $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ и тогда $\tilde{\delta}_{\tau_3} \leq \gamma_{\tau_1}$, иначе снова выполняется $\gamma_{\tau_1} < \tilde{\delta}_{\tau_3} = \tilde{\delta}_{\tau_3} < \gamma_{\tau_2}$ и прежнее рассуждение вызывает прежнее противоречие.

Обращаясь к утверждению 2 следует просто заметить, что это утверждение повторяет предшествующие леммы 5.17 2) [29], 7.5 2) в следующей форме:

матрица S , допустимая для γ_τ на её носителе α_τ , по лемме 8.5 8) и определению 8.2 остаётся допустимой и неподавленной для всякого $\gamma_{\tau'} < \gamma_\tau$, такого, что $\tilde{\delta} < \gamma_{\tau'}$, вместе с теми же сопровождающими ординалами $a, \tilde{\delta}, \rho, \alpha$. Для единичной характеристики $a = 1$ это очевидно; для $a = 0$ эта лемма будет использоваться только в §11 и там мы вернёмся к её доказательству, изложенному более подробно. \dashv

Следующие леммы подтверждают дальнейшее распространение теории δ -функций на α -функции и аналогичны леммам 7.6, 7.7 об определённости δ -функций на заключительном интервале недостижимого кардинала k .

Итак, следующая лемма показывает, что существует кардинал $\delta < k$ такой, что

$$\{\tau : \delta < \gamma_\tau < k\} \subseteq \text{dom}(\alpha S_f);$$

более точно:

Лемма 8.9 (Об определённости α -функции)

Существуют ординалы $\delta < \gamma < k$ такие, что для каждого SIN_n -кардинала $\alpha_1 > \gamma$, $\alpha_1 < k$, предельного для $SIN_n \cap \alpha_1$, функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на непустом множестве

$$T^{\alpha_1} = \{\tau : \delta < \gamma_\tau^{<\alpha_1} < \alpha_1\}.$$

Минимальный из таких ординалов δ обозначается через $\alpha\delta^*$, следующий за ним в SIN_n кардинал – через $\alpha\delta^{*1}$; также вводятся следующие соответствующие ординалы:

$$\alpha\tau_1^* = \tau(\alpha\delta^*), \quad \alpha\tau^{*1} = \tau(\alpha\delta^{*1}),$$

$$\text{так что} \quad \alpha\delta^* = \gamma_{\alpha\tau_1^*}, \quad \alpha\delta^{*1} = \gamma_{\alpha\tau^{*1}},$$

$$\text{и} \quad \alpha^{*1} = \alpha_{\alpha\tau^{*1}}^{<\alpha_1\downarrow}, \quad \alpha\rho^{*1} = \rho_{\alpha\tau^{*1}}^{<\alpha_1}.$$

Доказательство состоит в применении леммы 6.14 [29], как это было сделано в доказательстве леммы 7.6, но для большего редуцирующего кардинала

$$\chi = (\chi^*)^{+\omega_0} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = k, \quad m = n + 1.$$

Получающуюся функцию \mathfrak{A} , определённую на некотором непустом множестве

$$T = \{\tau : \gamma_{\tau_0} \leq \gamma_\tau < k\},$$

нужно рассмотреть следующим образом:

Рассмотрим согласно лемме 6.14 [29] матрицу $S_\tau^1 = \mathfrak{A}(\tau)$, редуцированную к кардиналу $\chi = (\chi^*)^{+\omega_0}$ на носителе $\alpha_\tau^1 > \gamma_\tau$;

она имеет допустимый производящий собственный диссеминатор $\delta_\tau^1 < \gamma_\tau$ с базой $\rho_\tau^1 \supset S_\tau^1$. Можно видеть, что $\rho_\tau^1 > \chi^{*+}$ и поэтому δ_τ^1 может быть рассмотрен как допустимый диссеминатор для S_τ^1 на α_τ^1 с базой χ^{*+} .

Теперь обратимся к кардиналу предскачка

$$\alpha^1 = \alpha_\tau^{1\downarrow};$$

по той же лемме $cf(\alpha^1) \geq \chi^{*+}$ и можно ввести матрицу S_τ^2 редуцированную к χ^* и обладающую тем же кардиналом предскачка скачка α^1 и поэтому тем же диссеминатором δ_τ^1 с той же базой χ^{*+} , используя лемму 5.12 [29] следующим образом: Если выполняется утверждение

$$\exists \alpha \in [\alpha^1, \alpha_\tau^1[\quad \sigma(\chi^*, \alpha), \quad (8.6)$$

тогда пусть S_τ^2 будет матрица, редуцированная к χ^* на минимальном носителе α_τ^2 и порождённая кардиналом α^1 , так что $\alpha^1 = \alpha_\tau^{2\downarrow}$ (как это было сделано в доказательстве леммы 6.12 [29] с кардиналом α_0 , играющем здесь роль α^1). В противном случае, когда (8.6) нарушается, можно видеть, что так как утверждение леммы 5.12 [29] сохраняется ниже α^1 , то матрица S_τ^1 сохраняет кардинал предскачка α_τ^\downarrow (и, значит, сохраняет α^1), то есть он сохраняется (остаётся кардиналом предскачка) при редуцировании матрицы S_τ^1 на носителе α_τ^1 к кардиналу χ^* ; поэтому мы можем определить следующую матрицу (см. определения 4.1, 5.1, 5.5 [29])

$$S_\tau^2 \Rightarrow \widetilde{\mathbf{S}}_n^{\sin \triangleleft \alpha_\tau^1} \overline{\overline{\chi^*}} \quad \text{на носителе} \quad \alpha_\tau^2 = \sup \text{dom}(\widetilde{\mathbf{S}}_n^{\sin \triangleleft \alpha_\tau^1} \overline{\overline{\chi^*}}).$$

Эта матрица – сингулярная на носителе α_τ^2 : условия 1), 3) определения сингулярности 5.7 [29] очевидно выполняются, а условие 2) можно установить с помощью *расщепляющего метода*, повторяя дословно аргумент из доказательства леммы 5.12 [29] (где α_1 , χ заменяются на α_τ^2 , χ^* соответственно).

В любом случае $\alpha^1 = \alpha_\tau^{2\Downarrow}$ и S_τ^2 оказывается допустимой на α_τ^2 для γ_τ вместе с тем же диссеминатором $\tilde{\delta}_\tau^1$ и его базой χ^{*+} , так как все условия утверждения \mathbf{K}^0 из определения 8.2 очевидно выполняются когда $\rho = \chi^{*+}$. Точно также такая матрица S_τ^2 на носителе α_τ^2 неподавлена благодаря базе $\rho = \chi^{*+}$. Она может быть единичной или нулевой, но в любом случае существует некоторая α -матрица, редуцированная к χ^* , допустимая и неподавленная для γ_τ вместе со своими атрибутами.

Теперь нужно взять любой достаточно большой кардинал γ такой, что для всякого $\gamma_\tau > \gamma$ существует некоторая матрица S_τ^2 с базой $\rho = \chi^{*+}$; она допустима и неподавлена для γ_τ ниже α_1 для каждого $\alpha_1 \in SIN_n$, $\alpha_1 > \gamma$, $\alpha_1 < k$, по определению.

Таким образом, после минимизации таких получающихся матриц и их атрибутов следуя определению 8.3 возникает функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ и её сопровождающие ординальные функции, определённые на T^{α_1} для всякого $\alpha_1 \in SIN_n$, $\alpha_1 > \gamma$.

⊥

В заключение этого раздела применяя метод доказательства леммы 7.7 устанавливается

Лемма 8.10

$$\alpha\delta^* \in SIN_n \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^{*1}} [< \alpha\rho^{*1}].$$

Доказательство. Будем использовать обозначения из предыдущей леммы 8.9.

Сначала начинает действовать рассуждение из доказательства леммы 7.7, рассматривая диссеминатор $\tilde{\delta}_{\alpha\tau^{*1}}$ с базой $\alpha\rho^{*1}$ матрицы $\alpha S_{\alpha\tau^{*1}}$ на носителе $\alpha_{\alpha\tau^{*1}}$ с кардиналом предскачка

$\alpha^{*1} = \alpha_{\alpha\tau^{*1}}^{\Downarrow}$. Так как

$$\alpha\delta^{*1} \in SIN_n, \quad \tilde{\delta}_{\alpha\tau^{*1}} < \alpha\delta^{*1}$$

и

$$\tilde{\delta}_{\alpha\tau^{*1}} \in SIN_n^{<\alpha^{*1}} \cap SIN_{n+1}^{<\alpha^{*1}} [< \alpha\rho^{*1}],$$

то лемма 3.8 влечёт $\tilde{\delta}_{\alpha\tau^{*1}} \in SIN_n$.

Теперь предположим, что эта лемма 8.10 неверна:

$$\alpha\delta^* \notin SIN_n,$$

тогда

$$\tilde{\delta}_{\alpha\tau^{*1}} < \alpha\delta^* = \gamma_{\alpha\tau_1^*}.$$

Благодаря лемме 3.2 [29] можно ограничить Σ_{n-1} -утверждение о существовании носителя матрицы $\alpha S_{\alpha\tau^{*1}}$, допустимом вместе с теми же $\tilde{\delta}_{\alpha\tau^{*1}}$, $\alpha\rho^{*1}$, имеющимся SIN_{n-1} -кардиналом $\gamma_{\alpha\tau_1^*+1}$, как это было сделано в доказательстве леммы 8.5 8). Тогда матрица $\alpha S_{\alpha\tau^{*1}}$ получает снова некоторый свой носитель

$$\alpha' \in]\gamma_{\alpha\tau^{*1}}, \gamma_{\alpha\tau^{*1}+1}[,$$

допустимый для $\gamma_{\alpha\tau^{*1}}$ вместе с теми же диссеминатором и базой данных.

Но благодаря минимальности $\alpha\tau_1^*$ выполняется

$$\alpha\tau_1^* \notin \text{dom}(\alpha S_f).$$

Это может быть только когда матрица $\alpha S_{\tau^{*1}}$ на α' допустима, но подавлена для $\gamma_{\alpha\tau_1^*}$; в свою очередь если это может быть, то только когда

$$\alpha\delta^* = \gamma_{\alpha\tau_1^*} \in SIN_n,$$

вопреки предположению.

Что касается оставшейся части леммы:

$$\alpha\delta^* \in SIN_n^{<\alpha^{*1}} [< \alpha\rho^{*1}],$$

то она не используется в дальнейшем вплоть до §11 и поэтому мы мы вернёмся к ней в §11 . —

9 Анализ монотонности α -функций

В этом разделе первая составляющая требуемого противоречия – монотонность α -функций – исследуется в различных важных случаях.

Как мы увидим, это свойство довольно сильное; в частности всякий интервал $[\tau_1, \tau_2[$ монотонности такой функции не может быть “слишком длинным”, – соответствующий интервал $]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ не может содержать никаких SIN_n -кардиналов, и если $\gamma_{\tau_2} \in SIN_n$, то такая функция получает некоторые постоянные характеристики и *стабилизируется* на таком $[\tau_1, \tau_2[$. Мы начинаем с последней ситуации стабилизации:

Определение 9.1

Функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ называется монотонной на интервале $[\tau_1, \tau_2[$ и на соответствующем интервале $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ ниже α_1 , если $\tau_1 + 1 < \tau_2$, $]\tau_1, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1})$ и

$$\forall \tau', \tau'' (\tau_1 < \tau' < \tau'' < \tau_2 \longrightarrow \alpha S_{\tau'}^{<\alpha_1} \leq \alpha S_{\tau''}^{<\alpha_1}) .$$

⊥

Чтобы оперировать этим понятием, удобно использовать следующие Δ_1 -формулы, которые будут играть основную роль в этом разделе:

$$A_0^{1<\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}):$$

$$\begin{aligned} A_0^{<\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge \forall \tau', \tau'' (\tau_1 < \tau' < \tau'' < \tau_2 \rightarrow \\ \rightarrow \alpha S_{\tau'}^{<\alpha_1}(\tau') \leq \alpha S_{\tau''}^{<\alpha_1}(\tau'')) ; \end{aligned}$$

таким образом, здесь утверждается, что функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на интервале $]\tau_1, \tau_2[$, обладающим свойством A_0 (напомним определение 8.1 1.0), и более того – она монотонна на

интервале $[\tau_1, \tau_2[$; поэтому мы будем называть его и соответствующий интервал $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ *интервалами монотонности* функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$;

$$A_1^{1<\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}):$$

$$A_0^{1<\alpha_1}(\chi, \tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge \exists \gamma^2 (\gamma^2 = \gamma_{\tau_2} \wedge SIN_n^{<\alpha_1}(\gamma^2));$$

далее символы функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ будут опускаться в таких обозначениях (если она будет подразумеваться в контексте).

Теперь ещё не все готово для доказательства (тотальной) монотонности функции αS_f – второго компонента заключительного противоречия – но некоторые её фрагменты очевидны аналогично леммам 5.17 1) [29], 7.9. Например, из леммы 3.2 [29] непосредственно следует

Лемма 9.2 (О монотонности α -функции)

Пусть

$$\tau_1 < \tau_2, \quad a_{\tau_2}^{<\alpha_1} = 1, \quad \tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau_1},$$

тогда

$$\alpha S_{\tau_1}^{<\alpha_1} \leq \alpha S_{\tau_2}^{<\alpha_1}, \quad a_{\tau_1}^{<\alpha_1} = 1.$$

Аналогично для нулевой характеристики $a_{\tau_1}^{<\alpha_1} = a_{\tau_2}^{<\alpha_1} = 0$.

+

Лемма 9.3 (О стабилизации α -функции)

Пусть

(i) $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ монотонна на $[\tau_1, \tau_2[$ ниже α_1 :

$$A_1^{1<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2);$$

(ii) $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$ это наследник в $SIN_n^{<\alpha_1}$.

Тогда функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ стабилизируется на $[\tau_1, \tau_2[$, то есть существуют S^0 и $\tau_0 \in]\tau_1, \tau_2[$ такие, что

$$\forall \tau \in [\tau_0, \tau_2[\quad \alpha S_\tau^{<\alpha_1} = S^0.$$

Наименьший из таких ординалов τ_0 называется ординалом стабилизации функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ для τ_2 ниже α_1 и обозначается через $\tau_2^{s<\alpha_1}$.

Доказательство снова представляет собой типичное применение леммы 3.2 [29]; мы будем опускать верхние индексы $< \alpha_1$, $\triangleleft \alpha_1$. Предположим, что эта лемма неверна; рассмотрим ординал

$$\rho^0 = \sup\{Od(\alpha S_\tau) : \tau_1 < \tau < \tau_2\}.$$

Мы будем применять метод рассуждений, использованный выше в доказательстве леммы 8.5 8); введём для этого кардиналы

$$\gamma_{\tau_2^n} = \sup\{\gamma < \gamma_{\tau_2} : \gamma \in SIN_n\};$$

$$\gamma_{\tau_{1,2}^n} = \max\{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2^n}\}.$$

Затем следует повторить определение 8.3 матричной функции αS_f и сопровождающих его ординальных функций ниже α_1 на множестве

$$T_{\tau_{1,2}^n}^{\alpha_1} = \{\tau : \gamma_{\tau_{1,2}^n} < \gamma_\tau < \alpha_1\}, \quad (9.1)$$

но сохраняя *только* SIN_n -кардиналы $\leq \gamma_{\tau_2^n}$; это можно сделать следующим образом:

Определение 8.3 базируется на формуле

$$\alpha \mathbf{K}^*(a, \delta, \gamma_\tau, \alpha, \rho, S) \quad (9.2)$$

ниже α_1 (см. определение 8.2 4)), которая означает, напомним, что S это α -матрица на её носителе α характеристики a с диссеминатором δ и базой ρ , допустимая для γ_τ и,

более того, неподавленная на этом α для γ_τ ниже α_1 ; но так как для каждого $\tau \in T_{\tau_{1,2}}^{<\alpha_1}$ выполняется $\gamma_\tau \notin SIN_n$, то условие неподавления $\neg A_5^{S,0}$ в $\alpha\mathbf{K}^*$ тривиально выполняется и может быть опущено, а тогда $\alpha\mathbf{K}^*$ трансформируется в формулу $\alpha\mathbf{K}$.

Эта последняя формула относится к классу Σ_n , потому что она включает в себя Σ_n -формулу \mathbf{K}_n^\forall . Но рассмотрим кардинал $\gamma_{\tau_2^n}$ и заменим в формуле (9.2) её поформулу \mathbf{K}_n^\forall Δ_1 -формулой

$$SIN_n^{<\alpha^\downarrow}(\gamma_{\tau_2^n}),$$

тогда Σ_n -формула (9.2) преобразуется в некоторую Π_{n-2} -формулу, которую будем обозначать через

$$\alpha\mathbf{K}_{n-2}^{*1}(a, \delta, \gamma_\tau, \alpha, \rho, S).$$

Таким образом матричная функция, определённая на множестве $T_{\tau_{1,2}}^{\alpha_1}$ (9.1) как в определении 8.3, но посредством формулы (9.2) заменённой на $\alpha\mathbf{K}_{n-2}^{*1}$, очевидно совпадает с функцией αS_f на интервале $]\tau_{1,2}^n, \tau_2[$; мы будем обозначать эту последнюю функцию через αS_f^1 .

Далее, так как эта αS_f^1 монотонна на $\text{оп }]\tau_{1,2}^n, \tau_2[$, но не стабилизируется на этом интервале, то ординал ρ_0 — *предельный* и поэтому выполняется следующее предложение ниже γ_{τ_2} :

$$\forall \tau (\tau_{1,2}^n < \tau \longrightarrow \exists S (S = \alpha S_\tau^1 \wedge S \triangleleft \rho^0)) .$$

Оно может быть сформулировано в Π_n -форме:

$$\begin{aligned} \forall \tau, \gamma', \gamma'' \Big[\gamma_{\tau_{1,2}^n} < \gamma' = \gamma_\tau < \gamma'' = \gamma_{\tau+1} \rightarrow \\ \rightarrow \big(\exists \delta, \alpha, \rho < \gamma'' \exists S \triangleleft \rho \big(\alpha\mathbf{K}_{n-2}^{*1}(1, \delta, \gamma', \alpha, \rho, S) \wedge S \triangleleft \rho^0 \big) \vee \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\vee \left(\exists \delta, \alpha, \rho < \gamma'' \exists S \triangleleft \rho \ \alpha \mathbf{K}_{n-2}^{*1}(0, \delta, \gamma', \alpha, \rho, S) \wedge S \triangleleft \rho^0 \wedge \right. \\ \left. \wedge \forall \delta', \alpha', \rho' < \gamma'' \forall S' \triangleleft \rho' \neg \alpha \mathbf{K}_{n-2}^{*1}(1, \delta', \gamma', \alpha', \rho', S') \right) \Bigg] .$$

Теперь возникает противоречие:

С одной стороны, SIN_n -кардинал γ_{τ_2} продолжает утверждение (9.3) до α_1 и в результате возникает *минимальная* матрица $\alpha S_{\tau_2}^1 \triangleleft \rho^0$.

Но с другой стороны ρ^0 – это предельный ординал и поэтому существует

$$\tau_{1,3}^n \in]\tau_{1,2}^n, \tau_2[\text{ такой, что } \alpha S_{\tau_{1,3}^n}^1 \geq \alpha S_{\tau_2}^1.$$

Поэтому ниже γ_{τ_2} выполняется следующее предложение:

$$\forall \tau \left(\tau_{1,3}^n < \tau \longrightarrow \forall S (S = \alpha S_{\tau}^1 \longrightarrow S \geq \alpha S_{\tau_2}^1) \right) .$$

Оно тоже может быть сформулировано в Π_n -форме:

$$\begin{aligned} \forall \tau, \gamma', \gamma'' \Bigg[& \gamma_{\tau_{1,3}^n}^n < \gamma' = \gamma_{\tau} < \gamma'' = \gamma_{\tau+1} \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\forall \delta, \alpha, \rho < \gamma'' \forall S \triangleleft \rho \left(\alpha \mathbf{K}_{n-2}^{*1}(1, \delta, \gamma', \alpha, \rho, S) \rightarrow \alpha S_{\tau_2}^1 \leq S \right) \wedge \right. \\ & \wedge \forall \delta, \alpha, \rho < \gamma'' \forall S \triangleleft \rho \left(\alpha \mathbf{K}_{n-2}^{*1}(0, \delta, \gamma', \alpha, \rho, S) \wedge \right. \\ & \wedge \forall \delta', \alpha', \rho' < \gamma'' \forall S' \triangleleft \rho' \neg \alpha \mathbf{K}_{n-2}^{*1}(1, \delta', \gamma', \alpha', \rho', S') \rightarrow \\ & \left. \left. \rightarrow \alpha S_{\tau_2}^1 \leq S \right) \right) \Bigg] , \end{aligned} \quad (9.4)$$

которое γ_{τ_2} продолжает до α_1 и поэтому

$$\alpha S_{\tau_2}^1 \leq \alpha S_{\tau_2}^1.$$

Напомним, что символы \mathbf{n}^α , χ^* , $\alpha S_f^{<\alpha_1}$, $a_f^{<\alpha_1}$ в написаниях формул могут часто опускаться для сокращения записей. Кроме того, условие эквинформативности $A_6^e(\alpha_1)$

$$\begin{aligned} \chi^* < \alpha_1 \wedge A_n^{<\alpha_1}(\chi^*) &= \|u_n^{<\alpha_1}(\underline{l})\| \wedge SIN_{n-2}(\alpha_1) \wedge \\ &\wedge \forall \gamma < \alpha_1 \exists \gamma_1 \in [\gamma, \alpha_1[\ SIN_n^{<\alpha_1}(\gamma_1) \end{aligned}$$

всегда накладывается на ограничивающие кардиналы α_1 .

Стабилизационное свойство чрезвычайно существенно для дальнейшего; более того, оказывается, что аналогичное свойство возникает у характеристической функции, играющее далее ключевую роль – усложняя определённым образом доказательство леммы 9.3 можно доказать аналогичное характеристическое свойство:

Лемма 9.4 (О стабилизации характеристики)

Пусть

- (i) $A_1^{1<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2)$;
- (ii) $\forall \tau < \tau_2 \ \exists \tau' \in [\tau, \tau_2[\ a_{\tau'}^{<\alpha_1} = 1$;

Тогда

$$\forall \tau' \in]\tau_1, \tau_2[\ a_{\tau'}^{<\alpha_1} = 1.$$

В таком случае мы будем говорить, что единичная характеристика стабилизируется на $[\tau_1, \tau_2[$ ниже α_1 .

Аналогично для нулевой характеристики.

Доказательство проводится индукцией по (α_1, τ_2) (напомним, что множество таких пар рассматривается как канонически упорядоченное как и ранее, с α_1 как первым компонентом и τ_2 вторым). Предположим, что эта пара – минимальная нарушающая эту лемму. Нетрудно видеть, что $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$ является наследником в классе $SIN_n^{<\alpha_1}$; именно этот случай используется в дальнейшем. Напомним, что для каждой матрицы единичной характеристики на её носителе и каждого $\gamma_\tau \notin SIN_n$ условие неподавления $\neg A_5^{S,0}$ тривиально выполняется и может быть опущено; таким образом для единичной характеристики $a = 1$ формула $\alpha \mathbf{K}^{*<\alpha_1}$ эквивалентна $\alpha \mathbf{K}^{<\alpha_1}$; верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ будут опускаться для краткости. Согласно предыдущей лемме существует стабилизационный ординал τ_2^s функции αS_f на $[\tau_1, \tau_2[$ и матрица S^0 такие, что

$$\forall \tau \in [\tau_2^s, \tau_2[\quad \alpha S_\tau = S^0.$$

По условию существует минимальный ординал $\tau^1 \in [\tau_2^s, \tau_2[$ такой, что $a_{\tau^1} = 1$. Дальнейшее рассуждение разделяется на две части:

1. Сначала докажем, что $\forall \tau \in [\tau^1, \tau_2[\quad a_\tau = 1$.

Допустим это неверно, тогда существует минимальный ординал $\tau^0 \in]\tau^1, \tau_2[$ для которого $a_{\tau^0} = 0$; так что $a_\tau \equiv 1$ on $[\tau^1, \tau^0[$ (можно заметить кстати, что здесь матрица S^0 на разных носителях может обладать разными характеристиками). Рассмотрим следующие подслучаи для

$$S^0 = \alpha S_{\tau^0}, \quad \check{\delta}^0 = \check{\delta}_{\tau^0}, \quad \alpha^0 = \alpha_{\tau^0}^\downarrow :$$

1а. $\check{\delta}^0 \notin SIN_n$. Так как $\gamma_{\tau_1} \in SIN_n$, то лемма 3.8 1) [29] влечёт

$$\gamma_{\tau_1} < \check{\delta}^0, \quad \check{\delta}^0 \in \left(SIN_n^{<\alpha^0} - SIN_n \right)$$

и можно использовать кардинал

$$\gamma_{\tau^2} = \min \left(\text{SIN}_n^{<\alpha^0} - \text{SIN}_n \right).$$

Благодаря лемме 3.8 [29] нетрудно видеть, что γ_{τ^2} это наследник $\text{SIN}_n^{<\alpha^0}$ некоторого кардинала

$$\gamma_{\tau^3} \geq \gamma_{\tau^1}, \quad \gamma_{\tau^3} \in \text{SIN}_n \text{ ниже } \alpha_1,$$

и функция $\alpha S_f^{<\alpha^0}$ монотонна на интервале $[\tau^3, \tau^2[$. Так как $a_\tau \equiv 1$ на $[\tau^1, \tau^0[$, то лемма 3.2 [29] влечёт, что интервал $]\gamma_{\tau^1}, \gamma_{\tau^2}[$ содержит допустимые носители матриц единичной характеристики, расположенные *конфинанльно* кардиналу γ_{τ^2} , потому что $\text{SIN}_n^{<\alpha^0}$ -кардинал γ_{τ^2} ограничивает Σ_n -утверждение о существовании таких носителей. После этого кардинал γ_{τ^2} *продолжает* единичную характеристику до α_0 , и таким образом S^0 на α_{τ_0} становится единичной матрицей вопреки предположению.

Метод этого аргумента состоит в ограничениях и продолжениях, применяемых по очереди, поэтому мы будем называть его методом *ограничения-и-продолжения*. Он будет часто использоваться в дальнейшем в разнообразных типичных ситуациях, поэтому сейчас следует остановиться на нём подробнее:

Рассмотрим произвольный кардинал $\gamma < \gamma_{\tau^2}$; имеется единичная матрица S^0 на некотором носителе $\alpha > \gamma$ и она остаётся единичной ниже α^0 благодаря лемме 8.7 об абсолютности. Затем рассуждение переходит к ситуации ниже α^0 ; очевидно, выполняется утверждение ниже α^0 :

$$\exists \delta, \gamma_\tau, \alpha, \rho \left(\gamma < \gamma_\tau \wedge \alpha \mathbf{K}(1, \delta, \gamma_\tau, \alpha, \rho, S^0) \right),$$

оно относится Σ_n и содержит только константы

$$\chi^*, \gamma < \gamma_{\tau^2}, S^0 \triangleleft \chi^{*+} < \gamma_{\tau^2}.$$

Поэтому Π_n -кардинал γ_{τ^2} ниже α_0 ограничивает его по лемме 3.2 [29], то есть оно выполняется после его ограничения кардиналом γ_{τ^2} :

$$\exists \delta, \gamma_{\tau}^{<\gamma_{\tau^2}}, \alpha, \rho < \gamma_{\tau^2} \left(\gamma < \gamma_{\tau}^{<\gamma_{\tau^2}} \wedge \alpha \mathbf{K}^{<\gamma_{\tau^2}}(1, \delta, \gamma_{\tau}^{<\gamma_{\tau^2}}, \alpha, \rho, S^0) \right).$$

Но здесь верхние индексы $< \gamma_{\tau^2}$, $< \gamma_{\tau^2}$ можно опустить благодаря $\Pi_n^{<\alpha^0}$ -субнедостижимости кардинала γ_{τ^2} и в результате здесь появляются допустимые носители

$$\alpha \in]\gamma, \gamma_{\tau^2}[$$

матрицы S^0 единичной характеристики ниже α^0 для произвольного $\gamma < \gamma_{\tau^2}$.

Тогда по индуктивной гипотезе $a_{\tau} \equiv 1$ на $]\tau_1, \tau^2[$, и ниже γ_{τ^2} выполняется утверждение

$$\forall \tau \left(\gamma_{\tau^3} < \gamma_{\tau} \longrightarrow a_{\tau} = 1 \right)$$

которое может быть сформулировано в Π_n -форме:

$$\begin{aligned} & \forall \gamma \left(\gamma_{\tau^3} < \gamma \wedge SIN_{n-1}(\gamma) \longrightarrow \right. \\ & \left. \longrightarrow \exists \delta, \alpha, \rho, S \left(SIN_n^{<\alpha^{\downarrow}}(\gamma_{\tau^3}) \wedge \alpha \mathbf{K}_{n+1}^{*\exists}(1, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \right) \right). \end{aligned}$$

Кардинал $\gamma_{\tau^2} \in SIN_n^{<\alpha^0}$ продолжает это предложение до α^0 и ниже α^0 появляется матрица единичной характеристики на некотором носителе $\in]\gamma_{\tau^0}, \alpha^0[$, допустимая вместе со своим диссеминатором $< \gamma_{\tau_0}$ и его базой для γ_{τ_0} .

Таким образом, $a_{\tau_0} = 1$ вопреки предположению, и мы переходим к следующему подслучаю:

1b. $\check{\delta}^0 \in SIN_n$. Так как $a_\tau \equiv 1$ на $[\tau^1, \tau^0[$, то существует матрица

$$S^0 = \alpha S_{\tau^1, 0} \text{ на носителе } \alpha_{\tau^1, 0} \in [\check{\delta}^0, \gamma_{\tau^0}[$$

единичной характеристики $a_{\tau^1, 0} = 1$ и можно рассмотреть ситуацию ниже $\alpha^{1,0} = \alpha_{\tau^1, 0}^\downarrow$ следующим образом.

Предстоящее рассуждение применяется далее не один раз, поэтому нужно остановиться на нём внимательнее.

Начнём с матрицы S^0 на α_{τ^0} . По лемме 8.5 5) нулевая характеристика матрицы S^0 на α_{τ^0} означает, что выполняется

$$\begin{aligned} \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 < \alpha^0 \ (A_2^{0 \triangleleft \alpha^0}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{< \alpha^0}) \wedge \\ \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] \ a_{\tau''}^{< \alpha^0} = 1 \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{< \alpha^0} = S^0). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Поэтому могут быть использованы некоторые ординалы

$$\tau'_1 < \tau'_2 < \tau'_3 < \alpha^0$$

такие, что выполняется

$$A_2^0(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f) \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] \ a_{\tau''}^{< \alpha^0} = 1 \wedge \alpha S_{\tau'_2} = S^0 \quad (9.6)$$

ниже α^0 , то есть после \triangleleft -ограничения кардиналом α^0 .

Ключевую роль будет играть так называемый *медиатор*: это некоторый $SIN_n^{< \alpha^0}$ -кардинал γ^0 такой, что

$$\gamma_{\tau'_1}^{< \alpha^0} < \gamma_{\tau'_2}^{< \alpha^0} < \gamma_{\tau'_3}^{< \alpha^0} < \gamma^0 < \alpha^0 \quad (9.7)$$

который существует благодаря лемме 8.5 4). По лемме 8.7 об абсолютности допустимости и единичной характеристики матричной α -функции эти значения и их атрибуты ниже α^0 и ниже γ^0 сопадают на множестве

$$\{\tau : \gamma_\tau^{< \alpha^0} < \gamma^0 \wedge a_\tau^{< \alpha^0} = 1\}$$

и поэтому (9.7), (9.6) влекут следующее Σ_{n+1} -утверждение ниже α^0 :

$$\begin{aligned} \exists \gamma^0 \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 < \gamma^0 (SIN_n(\gamma^0) \wedge \gamma_{\tau'_1}^{<\gamma^0} < \gamma_{\tau'_2}^{<\gamma^0} < \gamma_{\tau'_3}^{<\gamma^0} < \gamma^0 \wedge \\ \wedge A_2^{0 \triangleleft \gamma^0}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{<\gamma^0}) \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] a_{\tau''}^{<\gamma^0} = 1 \wedge \\ \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{<\gamma^0} = S^0). \end{aligned} \quad (9.8)$$

По лемме 8.5 3)мы имеем

$$\check{\delta}^0 \in SIN_{n+1}^{<\alpha^0} [< \rho_{\tau^0}]$$

и тогда по лемме 3.2 [29] существует некоторое γ^0 , для которого выполняется (9.8), но *уже ниже* $\check{\delta}^0$. Отсюда и из леммы 3.8 [29] следует, что SIN_n -субнедостижимость $\check{\delta}^0$ влечёт существование SIN_n -кардинала $\gamma^{0'}$ с тем же свойством (9.8); отметим, что $\gamma^{0'}$ обладает той же SIN_n -субнедостижимостью, что и $\check{\delta}^0$. Таким образом, для некоторых кардиналов

$$\gamma_{\tau'_1}^{<\gamma^{0'}} < \gamma_{\tau'_2}^{<\gamma^{0'}} < \gamma_{\tau'_3}^{<\gamma^{0'}} < \gamma^{0'} \quad (9.9)$$

выполняется

$$\begin{aligned} A_2^{0 \triangleleft \gamma^{0'}}(\tau''_1, \tau''_2, \tau''_3, \alpha S_f^{<\gamma^{0'}}) \wedge \\ \wedge \forall \tau''' \in]\tau''_1, \tau''_2] a_{\tau'''}^{<\gamma^{0'}} = 1 \wedge \alpha S_{\tau''_2}^{<\gamma^{0'}} = S^0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Так как $\gamma^{0'}$ это SIN_n -кардинал, то везде в (9.9), (9.10) \triangleleft - и $<$ -ограничения этим кардиналом $\gamma^{0'}$ могут быть опущены по тем же леммам 3.8, 8.7.

Начиная с этого места следует повторить проведённые выше рассуждения, но в обратном порядке, и не для α^0 , но для $\alpha^{1,0}$. Тогда (9.9), (9.10) влекут (9.5), где α^0 заменён на $\alpha^{1,0}$ и поэтому матрица S^0 на $\alpha_{\tau^{1,0}}$ получает *нулевую характеристику* в противоречии с предположением.

2. Итак, утверждение 1. здесь доказано; осталось проверить ординал

$$\tau^{1,2} = \min\{\tau \in [\tau_1, \tau_2[: \forall \tau' \in]\tau, \tau_2[\ a_{\tau'} = 1\}$$

и доказать, что он совпадает с τ_1 .

Допустим, это не так и $\tau_1 < \tau^{1,2}$, тогда нужно рассмотреть две единичные матрицы

$$S^1 = \alpha S_{\tau^{1,2}}, \quad S^2 = \alpha S_{\tau^{1,2}+1},$$

используя матрицу S^2 на её носителе $\alpha_{\tau^{1,2}+1}$ с её производящим диссеминатором $\check{\delta}^2 = \check{\delta}_{\tau^{1,2}+1}$ следующим образом. Согласно леммам 8.5 7) (ii), 8.8 2) получается

$$\gamma_{\tau_1} \leq \check{\delta}^2 = \check{\delta}_{\tau^{1,2}+1}$$

и поэтому возникают только три подслучая:

2а. $\gamma_{\tau_1} = \check{\delta}^2$. Тогда по определению 8.3

$$\forall \tau \in]\tau_1, \tau^{1,2}[\ a_{\tau} = 1$$

в противоречии с предположением.

2б. $\gamma_{\tau_1} < \check{\delta}^2$, $\check{\delta}^2 \notin SIN_n$. Тогда действует метод ограничения-и-продолжения, буквально как выше в случае 1а. этого доказательства, но для

$$S^2, \check{\delta}^2 \text{ вместо } \alpha S_{\tau_0}, \check{\delta}^0$$

и снова получается $a_{\tau} \equiv 1$ on $]\tau_1, \tau^{1,2}[$.

2с. $\gamma_{\tau_1} < \check{\delta}^2$, $\check{\delta}^2 \in SIN_n$. Здесь снова используется метод ограничения-и-продолжения, но в несколько другой манере. Сначала по лемме 3.2 [29] матрица S^1 получает свои допустимые носители, расположенные конфинально кардиналу $\check{\delta}^2$, так что по индуктивной гипотезе

$$a_{\tau} \equiv 1 \text{ на множестве } \{\tau : \gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau} < \check{\delta}^2\}.$$

Тогда ниже диссеминатора $\check{\delta}^2$ выполняется следующее Π_{n+1} -утверждение

$$\forall \gamma (\gamma_{\tau_1} < \gamma \wedge SIN_{n-1}(\gamma) \rightarrow \exists \delta, \alpha, \rho, S \quad \alpha \mathbf{K}(1, \delta, \alpha, \gamma, \rho, S))$$

которое распространяется этим диссеминатором до $\alpha_{\tau^{1,2}+1}^\downarrow$ согласно лемме 6.6 [29] (для $m = n + 1$, $\delta = \check{\delta}^2$, $\alpha_1 = \alpha_{\tau^{1,2}+1}^\downarrow$) – и снова получается $a_\tau \equiv 1$ на том же множестве $]\tau_1, \tau^{1,2}]$. И в любом случае мы приходим к $\tau_1 = \tau^{1,2}$. \dashv

Следующая важная лемма будет доказана снова методом *ограничения-и-продолжения*, но в несколько более синтезированной форме.

Однако предварительно хорошо ввести следующие довольно удобные понятия, использующие понятия редуцированных спектров и матриц (напомним определения 4.1, 5.1 [29]).

В дальнейшем основной технический приём в рассуждениях будет состоять в рассмотрении некоторой матрицы S на её *различных носителях по очереди*. Такую трансформацию редуцированной матрицы S от одного её носителя α к другому её носителю α^1 мы будем называть *переносом* матрицы S от α к α^1 .

Такая техника будет часто применяться в дальнейшем и уже была использована в доказательствах лемм 7.5, 8.8, 9.4.

В ходе такого переноса редуцированной матрицы S от α к α^1 некоторые свойства универсума, ограниченного кардиналами скачка или предскачка матрицы S на α , сохраняются и поэтому мы будем называть их *внутренними свойствами* матрицы S ; другие свойства при этом нарушаются и поэтому они будут называться *внешними свойствами*.

Более точно: свойство или признак матрицы S , редуцированной к χ^* на её носителе α , будет называться *внешним*

свойством или признаком этой S (на α), если оно определимо ниже некоторого кардинала скачка или предскачка спектра

$$\text{dom}(\tilde{S}_n^{\sin \triangleleft \alpha} \bar{\mid} \chi^*)$$

через её некоторые другие кардиналы скачка или предскачка; аналогично для других объектов из L_α ; во всех других случаях они будут называться *внешними свойствами или признаками* матрицы S .

Эти понятия вводятся в действие леммой 5.11 [29] о матричной информативности, которая означает, напомним, что такие *внутренние* свойства сохраняются во время переноса матрицы S от одного её носителя к другому.

И вот очень важный пример *внешнего* свойства – свойство *характеристики*; оно включает в себя всю матрицу S на её носителе α , а не только некоторые её кардиналы скачка.

Действительно, возьмём произвольную матрицу S на её носителе α *нулевой* характеристики (если он существует), тогда по лемме 8.5 5) выполняется

$$\begin{aligned} \exists \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 < \alpha^\downarrow (A_2^{0 \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}) \wedge \\ \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] a_{\tau''}^{< \alpha^\downarrow} = 1 \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{< \alpha^\downarrow} = S), \end{aligned}$$

где S получает *меньший* носитель $\alpha_{\tau'_2}^{< \alpha^\downarrow}$, но уже *единичной* характеристики, благодаря условию $\forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] a_{\tau''}^{< \alpha^\downarrow} = 1$.

Но в дальнейшем все другие матричные свойства – *внутренние*, и одно из них релизует метод ограничения-и-продолжения в доказательстве нижеследующей леммы 9.5.

Эта лемма использует удобную функцию, которая уже была использована в доказательстве леммы 9.3:

$$Od \alpha S_f^{< \alpha_1}(\tau_1, \tau_2) = \sup \{ Od(\alpha S_\tau^{< \alpha_1}) : \tau_1 < \tau < \tau_2 \};$$

она необходима для формирования так называемых *лестниц* – семейств интервалов, которые будут служить главным техническим средством в доказательстве основной теоремы. Для этого необходимы следующие формулы ниже α_1 :

$$1. \quad A_{1.1}^{m\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}):$$

$$A_1^{1\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge \tau_2 = \sup \{ \tau : A_1^{1\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \};$$

здесь интервал $[\tau_1, \tau_2[$ – это максимальный интервал монотонности с левым $SIN_n^{<\alpha_1}$ -концом $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ и с правым $SIN_n^{<\alpha_1}$ -концом $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$ (максимальный в том смысле, что он не включается ни в какой другой такой интервал), поэтому мы будем называть его и соответствующий интервал $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ *максимальным интервалом монотонности* функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ ниже α_1 .

$$2. \quad A_{1.1}^{m1\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}):$$

$$A^{0\triangleleft\alpha_1}(\tau_1) \wedge A_{1.1}^{m\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge \forall \tau (\tau_1 < \tau < \tau_2 \rightarrow a_\tau^{<\alpha_1} = 1);$$

в добавление к $A_{1.1}^{m\triangleleft\alpha_1}$ здесь утверждается, что не существует α -матриц, допустимых для $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ ниже α_1 и функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ имеет на $]\tau_1, \tau_2[$ значения $\alpha S_\tau^{<\alpha_1}$ только единичной характеристики $a_\tau^{<\alpha_1} = 1$; в этом случае единичная характеристика $a = 1$ стабилизируется на интервале $[\tau_1, \tau_2[$ и на соответствующем интервале $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ ниже α_1 по лемме 9.4.

$$3. \quad A_{1.1}^{st\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_*, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}):$$

$$A_{1.1}^{m1\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_*, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}) \wedge \tau_1 < \tau_* \leq \tau_2 \wedge A_1^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1});$$

здесь говорится, что функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на интервале $]\tau_1, \tau_2[$, но на его начальном максимальном подинтервале монотонности $]\tau_1, \tau_*[$ с $\gamma_{\tau_*} \in SIN_n^{<\alpha_1}$ она имеет даже *единичную* характеристику, стабилизирующуюся на нём; поэтому этот интервал и соответствующий интервал $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ будут называться далее (единичными) ступенями ниже α_1 (как мы увидим, этот термин оправдывается ростом гёделевской функции *Od* на таких ступенях); в этом случае ординал

$$Od\alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*)$$

будет называться *высотой* такой ступени.

$$4. \quad A_{1.1}^{Mst<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}):$$

$$A_{1.1}^{st<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}) \wedge A_{1.1}^{M<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1});$$

в дополнение здесь указывается, что интервал $]\tau_1, \tau_2[$ – максимальный с $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \in SIN_n^{<\alpha_1}$, поэтому мы будем называть интервал $]\tau_1, \tau_2[$ и соответствующий интервал $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ *максимальными (единичными) ступенями* ниже α_1 .

Эти наблюдения приводят к следующему понятию *лестницы*:

$$5. \quad A_8^{St<\alpha_1}(St, \chi, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}):$$

$$(St \text{ это функция на } \chi^{*+}) \wedge$$

$$\wedge \forall \beta < \chi^{*+} \exists \tau_1, \tau_*, \tau_2 (St(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \wedge$$

$$\wedge A_{1.1}^{Mst<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}) \wedge$$

$$\wedge \forall \tau_1, \tau_*, \tau_2 (A_{1.1}^{Mst<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}, a_f^{<\alpha_1}) \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\longrightarrow \exists \beta < \chi^{*+} \mathcal{St}(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \wedge \\
&\wedge \forall \beta_1, \beta_2 < \chi^{*+} \forall \tau'_1, \tau'_*, \tau'_2 \forall \tau''_1, \tau''_*, \tau''_2 (\beta_1 < \beta_2 \wedge \\
&\wedge \mathcal{St}(\beta_1) = (\tau'_1, \tau'_*, \tau'_2) \wedge \mathcal{St}(\beta_2) = (\tau''_1, \tau''_*, \tau''_2) \rightarrow \tau'_2 < \tau''_1 \wedge \\
&\wedge Od \alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau'_1, \tau'_*) < Od \alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau''_1, \tau''_*)) \wedge \\
&\wedge \sup \{ Od \alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*) : \exists \beta, \tau_2 \mathcal{St}(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \} = \chi^{*+};
\end{aligned}$$

здесь указывается, что \mathcal{St} это функция на χ^{*+} и что её значения – это все тройки (τ_1, τ_*, τ_2) такие, что интервалы $[\tau_1, \tau_2[$ являются максимальными единичными ступенями, расположенными последовательно, одна за другой. Поэтому такая функция \mathcal{St} будет называться *лестницей*, а интервалы $[\tau_1, \tau_2[$ и соответствующие интервалы $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ будут называться её ступенями ниже α_1 .

Это понятие оправдывается строгим возрастанием высот таких ступеней; мы будем также говорить, что эта лестница \mathcal{St} состоит из этих ступеней, или содержит эти ступени.

Соответственно этому, ординал

$$h(\mathcal{St}) = \sup \{ Od \alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*) : \exists \beta, \tau_2 \mathcal{St}(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \}$$

будет называться *высотой* всей лестницы \mathcal{St} . Таким образом, здесь требуется, чтобы высота всей лестницы \mathcal{St} возростала до χ^{*+} , то есть чтобы

$$h(\mathcal{St}) = \chi^{*+}.$$

Также кардинал

$$v = \sup \{ \gamma_{\tau_2} : \exists \beta, \tau_1, \tau_* \mathcal{St}(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \}$$

будет называться *завершающим* кардиналом лестницы \mathcal{St} и будет обозначаться через

$$v(\mathcal{St});$$

так что мы будем говорить, что лесница St завершается в этом кардинале $v(St)$.

Если такая лестница St существует ниже кардинала α_1 , то мы будем говорить, что этот α_1 *обладает* этой лестницей St . Когда кардинал $\alpha > \chi^*$ это носитель матрицы S и его кардинал предскачка $\alpha_1 = \alpha^{\downarrow}_{\chi^*}$ после χ^* обладает некоторой лестницей St , то мы будем говорить, что эта S на α обладает этой лестницей.

И вот очень важный пример *внутреннего свойства* матрицы: *внутреннее* свойство обладания матрицы S некоторой лестницей.

Это свойство для матрицы S на её носителе α определяется формулой

$$\exists St \triangleleft \alpha^{\downarrow+} A_8^{St \triangleleft \alpha^{\downarrow}}(St, \alpha S_f^{< \alpha^{\downarrow}}, a_f^{< \alpha^{\downarrow}}),$$

которая может быть ограничена кардиналом скачка α^{\downarrow} её носителя α после χ^* . Поэтому согласно лемме 5.11 [29] тем же свойством матрица S обладает на любом другом своём носителе $\alpha^1 > \chi^*$:

$$\exists St^1 \triangleleft \alpha^{1\downarrow+} A_8^{St^1 \triangleleft \alpha^{1\downarrow}}(St^1, \alpha S_f^{< \alpha^{1\downarrow}}, a_f^{< \alpha^{1\downarrow}}),$$

которое теперь может быть ограничено кардиналом скачка $\alpha^{1\downarrow}$ носителя α^1 после χ^* , и таким образом S на α^1 снова обладает некоторой лестницей St^1 как и раньше.

Лемма 9.5 (О срезании лестницы сверху)

Пусть

$$(i) \quad A_1^{1 \triangleleft \alpha_1}(\tau_1, \tau_2);$$

(ii) $\tau_2 \leq \tau_3$ и S^3 это матрица характеристики a^3 на носителе

$$\alpha_3 \in]\gamma_{\tau_3}^{< \alpha_1}, \alpha_1[$$

с диссеминатором $\tilde{\delta}^3$ и базой данных ρ^3 , допустимые для $\gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ ниже α_1 , с производящим собственным диссеминатором $\check{\delta}^{S^3}$ на α^3 ;

$$(iii) \quad \forall \tau < \tau_2 \quad \exists \tau' \in [\tau, \tau_2[\quad a_{\tau'}^{<\alpha_1} = a^3.$$

Тогда

$$1. \quad Od\alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2) < Od(S^3);$$

2а. таким образом, если $a^3 = 1$, то не существует лестницы ниже α_1 , завершающейся в некотором $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардинале $v < \alpha_3^\downarrow$;

2б. следовательно, если существует некоторая единичная матрица S^0 на её носителях ниже кардинала α_1 , расположенных кофинитально этому кардиналу α_1 :

$$\begin{aligned} \forall \gamma < \alpha_1 \quad \exists \gamma^1 \in]\gamma, \alpha_1[\quad \exists \delta, \alpha, \rho < \alpha_1 \quad (SIN_{n-1}^{<\alpha_1}(\gamma^1) \wedge \\ \wedge \alpha \mathbf{K}^{<\alpha_1}(1, \delta, \gamma^1, \alpha, \rho, S^0)), \end{aligned}$$

то этот кардинал α_1 не обладает никакой лестницей;

3. если S^3 это матрица, \leq -минимальная из всех матриц той же характеристики a^3 на носителях $\in]\gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}, \alpha_1[$ допустимых для $\gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}$, то

$$\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} < \check{\delta}^{S^3} \leq \tilde{\delta}^3 < \gamma_{\tau_3}.$$

Доказательство. Проведём это рассуждение для $a^3 = 1$, именно этот случай используется в дальнейшем; в этом важном случае $\tilde{\delta}^3 = \check{\delta}^{S^3}$ и условие (iii) можно ослабить до $a^3 = 1$ по лемме 3.2 [29]. В этом случае условие неподавления $\neg A_5^{S,0}$ для

единичной матрицы S на её носителях может быть опущено, потому что такая матрица S всегда неподавлена и формулы $\alpha\mathbf{K}^{*<\alpha_1}$, $\alpha\mathbf{K}_{n+1}^{*<\alpha_1}$ эквивалентны формулам $\alpha\mathbf{K}^{<\alpha_1}$, $\alpha\mathbf{K}_{n+1}^{<\alpha_1}$; верхние индексы $<\alpha_1$, $\triangleleft\alpha_1$ будут опускаться, как всегда.

По этому условию этой леммы матрица S^3 получает единичную характеристику на её допустимых носителях, расположенных конфинально кардиналу γ_{τ_2} , как это было в доказательстве части 1а. леммы 9.4, где γ_{τ_2} , S^0 на α_{τ_1} следует заменить на γ_{τ_2} , S^3 на α_3 . Таким образом, (i) и лемма 9.4 влекут

$$Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_2) \leq Od(S^3) \text{ и } a_\tau \equiv 1 \text{ на }]\tau_1, \tau_2[.$$

Теперь предположим, что функция αS_f стабилизируется на $[\tau_1, \tau_2[$ и пусть τ_2^s – это стабилизационный ординал для αS_f на $[\tau_1, \tau_2[$, так что существует матрица S^0 такая, что

$$\alpha S_\tau \equiv \alpha S_{\tau_2^s} = S^0 \text{ на } [\tau_2^s, \tau_2[.$$

Мы применим сейчас метод ограничения-и-продолжения, который уже был использован выше несколько раз. Для этого вернёмся к матрице S^0 на носителе $\alpha_{\tau_2^s+1}$ с кардиналом предскачка $\alpha^1 = \alpha_{\tau_2^s+1}^\downarrow$ и диссеминатором $\check{\delta}^1 = \check{\delta}_{\tau_2^s+1}$. Та же самая матрица S^0 на носителе $\alpha_{\tau_2^s}$ единичной характеристики по лемме 3.2 [29] об ограничении получает единичные характеристики на её допустимых носителях, расположенных конфинально кардиналу $\check{\delta}^1$ и поэтому ниже $\check{\delta}^1$ выполняется следующее Π_{n+1} -утверждение для $S = S^0$:

$$\begin{aligned} \forall \gamma \exists \gamma' (\gamma < \gamma' \wedge SIN_{n-1}(\gamma') \wedge \\ \wedge \exists \delta, \alpha, \rho \ \alpha\mathbf{K}(1, \delta, \gamma', \alpha, \rho, S)) . \end{aligned} \quad (9.11)$$

Диссеминатор $\check{\delta}^1$ продолжает его до α^1 и поэтому матрица S^0 получает единичную характеристику на её допустимых носителях, расположенных конфинально кардиналу α^1 , то есть

(9.11) выполняется матрицей $S = S^0$ при ограничении $\triangleleft \alpha^1$. После минимизации таких матриц S мы получаем матрицу $S = S^1$ со свойством (9.11) ниже α^1 и по лемме 4.6 [29] $S^1 \triangleleft S^0$. Нужно отметить, что утверждение (9.11), \triangleleft -ограниченное кардиналом α^1 с $S = S^1$, это *внутреннее свойство* матрицы S^0 . Если теперь

$$Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_2) = Od(S^3), \quad \text{то есть} \quad S^0 = S^3,$$

то матрица S^1 по лемме 5.11 [29] об информативности получает свои допустимые носители той же единичной характеристики, расположенными конфинально кардиналу предскачка $\alpha^3 = \alpha_3^\downarrow$, так как S^0 на носителе $\alpha_{\tau_2^s+1}$ обладает тем же свойством.

После этого снова по лемме 3.2 [29] такие носители появляются, расположенные конфинально γ_{τ_2} . Таким образом, наконец, благодаря (i) появляется противоречие:

$$Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_2) \leq Od(S^1) < Od(S^0). \quad (9.12)$$

Если же функция αS_f не стабилизируется на $[\tau_1, \tau_2[$, то ординал

$$\rho = Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_2)$$

— предельный. Теперь для того, чтобы закончить доказательства утверждения 1., можно заметить, что гёделевская конструктивная функция F принимает значения $F(\alpha) = F|\alpha$ для предельных ординалов α (см. Гёдель [22]). Нетрудно видеть, что $Od(S)$ не может быть предельным и поэтому $\rho \leq Od(S)$ влечёт $\rho < Od(S)$.

Обращаясь к утверждению 3., допустим, что оно неверно и

$$\check{\delta}^3 = \check{\delta}^{S^3} \leq \gamma_{\tau_2}$$

и, стоя на кардинале $\alpha^3 = \alpha_3^\downarrow$, рассмотрим получающуюся ситуацию ниже α^3 . Здесь следует рассмотреть два случая:

Случай 1. $\gamma_{\tau_1} < \check{\delta}^3 \leq \gamma_{\tau_2}$.

Так как $\gamma_{\tau_2} \in SIN_n$ и $\check{\delta}^3 \in SIN_n^{<\alpha^3}$, то из лемм 3.8 [29], 8.5 1), 8.7, 9.4 следует, что $\check{\delta}^3 \in SIN_n$ и

$$\alpha S_\tau^{<\alpha^3} \equiv \alpha S_\tau \quad \text{на} \quad \{\tau : \gamma_{\tau_1} < \gamma_\tau < \check{\delta}^3\}$$

и затем диссеминатор $\check{\delta}^3$ продолжает до α^3 следующее Π_{n+1} -утверждение об определённости функции αS_f единичной характеристики со значениями $< S^3$ благодаря части 1.:

$$\begin{aligned} \forall \gamma' \left(\gamma_{\tau_1} < \gamma' \wedge SIN_{n-1}(\gamma') \longrightarrow \right. \\ \left. \longrightarrow \exists \delta, \alpha, \rho, S \quad (S < S^3 \wedge \alpha \mathbf{K}(1, \delta, \gamma', \alpha, \rho, S)) \right) \end{aligned} \quad (9.13)$$

и поэтому существует допустимая матрица $\alpha S_{\tau_3}^{<\alpha^3}$ на носителе

$$\alpha_{\tau_3}^{<\alpha^3} \in]\gamma_{\tau_3}, \alpha^3[$$

единичной характеристики и со значением $\alpha S_{\tau_3}^{<\alpha^3} < S^3$ вопреки \leq -минимальности самой матрицы S^3 на α_3 . Осталось рассмотреть следующий

Случай 2. $\check{\delta}^3 \leq \gamma_{\tau_1}$.

Нужно отметить, что условие \leq -минимальности матрицы S^3 не используется в этом случае. Здесь матрица $S^0 = \alpha S_{\tau_1+2}$ единичной характеристики должна рассматриваться на носителе α_{τ_1+2} с кардиналам предскачка $\alpha^1 = \alpha_{\tau_1+2}^\downarrow$ и диссеминатором $\check{\delta}^1 = \check{\delta}_{\tau_1+2}$, как это было сделано выше для $S^0 = \alpha S_{\tau_2^s+1}$, $\alpha^1 = \alpha_{\tau_2^s+1}^\downarrow$, $\check{\delta}^1 = \check{\delta}_{\tau_2^s+1}$ в доказательстве утверждения 1. (договоримся сохранить прежние обозначения для удобства). И снова матрица αS_{τ_1+1} получает единичные характеристики

на своих допустимых носителях расположенных конфинально диссеминатору $\delta^1 = \gamma_{\tau_1}$ и он продолжает утверждение (9.11) для $S = \alpha_{S_{\tau_1+1}}$ до α^1 ; таким образом, это вызывает появление минимальной матрицы $S^1 < S^0$ с прежними свойствами: она получает единичную характеристику на её допустимых носителях, расположенных конфинально кардиналу α^1 .

По лемме 3.2 [29] появляются носители матрицы S^1 единичной характеристики, расположенные конфинально диссеминатору δ^3 , то есть (9.11) выполняется для $S = S^1$ при \triangleleft -ограничении этим диссеминатором δ^3 ; поэтому δ^3 продолжает это утверждение до α^3 . После этого кардинал $\gamma_{\tau_2} \in SIN_n$ ограничивает это утверждение с γ заменённым на произвольный постоянный кардинал $\gamma^1 < \gamma_{\tau_2}$. В результате матрица S^1 получает единичную характеристику на допустимых носителях, расположенных конфинально кардиналу γ_{τ_2} и мы снова приходим к противоречию (9.12).

Обращаясь к характеристике $\alpha^3 = 0$ следует повторить это рассуждение, но для *нулевых* матриц S на их носителях α , допустимых для рассматриваемых кардиналов γ_τ , но только для $\gamma_\tau \notin SIN_n$. Во всех подобных случаях такие матрицы S неподавляются по определению и снова поэтому условие неподавления $\neg A_5^{S,0}$ может быть опущено и снова формулы $\alpha \mathbf{K}^{* < \alpha_1}$, $\alpha \mathbf{K}_{n+1}^{* < \alpha_1}$ можно заменить на формулы $\alpha \mathbf{K}^{< \alpha_1}$, $\alpha \mathbf{K}_{n+1}^{< \alpha_1}$. Именно такие матрицы S на их носителях α следует использовать в методе ограничения-и-подавления, применённом выше, что обеспечивает доказательство для характеристики $a_3 = 0$.

И, наконец, утверждение 2а. следует из 1. почти очевидно. Предположим, оно не выполняется, то есть существует некоторая лестница $\mathcal{S}t$ ниже α_1 , завершающаяся в SIN_n -кардинале $v(\mathcal{S}t) < \alpha_3^\downarrow$; отсюда следует, что

$$v(\mathcal{S}t) < \gamma_{\tau_3}^{< \alpha_1}.$$

Дальнейшее рассуждение можно представить себе как “срезание этой лестницы сверху” матрицей S^3 и тем самым исключение этой лестницы:

По определению эта лестница состоит из *единичных* ступеней ниже α_1

$$St(\tau') = (\tau'_1, \tau'^*_2, \tau'_2)$$

и каждая из них обладает свойством

$$A_1^{1 \triangleleft \alpha_1}(\tau'_1, \tau'^*_2)$$

с единичной характеристикой, стабилизирующей на $[\tau'_1, \tau'^*_2[$ (см. определение лестницы перед леммой 9.5). Поэтому доказанное утверждение 1. влечёт, что высота всех её ступеней, то есть высота $h(St)$ всей лестницы St , ограничена сверху ординалом

$$Od(S^3) < \chi^{*+}$$

(“срезается” этим ординалом), хотя по определению лестницы St высота её ступеней возрастает до χ^{*+} , то есть $h(St) = \chi^{*+}$. Это же рассуждение составляет и доказательство утверждения 2b., если матрицу S^0 использовать вместо матрицы S^3 .

⊥

Отметим, что для характеристики $a^3 = 1$ условие минимальности матрицы S^3 в пункте 3. это леммы 9.5 можно опустить, используя немного изменённые аргументы из обсуждения случая 1.

Следующее очевидное следствие показывает, что высоты таких ступеней строго возрастают:

Следствие 9.6

Пусть

$$(i) \quad A_1^{1 \triangleleft \alpha_1}(\tau_1, \tau_2), \quad A_1^{1 \triangleleft \alpha_1}(\tau_3, \tau_4), \quad \tau_2 < \tau_4;$$

$$(ii) \quad \forall \tau < \tau_4 \quad \exists \tau' \in [\tau; \tau_4[\quad a_{\tau'}^{<\alpha_1} = 1.$$

Тогда

$$1) \quad \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[\cup]\tau_3, \tau_4[\quad a_{\tau}^{<\alpha_1} = 1;$$

$$2) \quad Od\alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2) < Od\alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_3, \tau_4);$$

$$3) \quad \forall \tau \in]\tau_3, \tau_4[\quad \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} < \check{\delta}_{\tau}^S = \tilde{\delta}_{\tau}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau}^{<\alpha_1},$$

где $\check{\delta}_{\tau}^S$ – это производящий собственный диссеминатор матрицы $\alpha S_{\tau}^{<\alpha_1}$ на $\alpha_{\tau}^{<\alpha_1}$; поэтому

$$\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}.$$

Доказательство. Из условий (i), (ii) и лемм 3.2 [29], 9.4 следует, что $a_{\tau}^{<\alpha_1} \equiv 1$ на интервалах $] \tau_1, \tau_2[$, $] \tau_3, \tau_4[$. Поэтому лемма 9.5 (где τ_3 играет роль любого $\tau \in] \tau_3, \tau_4[$) влечёт утверждения 2), 3). Для $\tau = \tau_3 + 1$ тогда получается $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} < \check{\delta}_{\tau}^{<\alpha_1}$ и в то же время согласно леммам 8.5 7) (ii), 8.8 2) – $\check{\delta}_{\tau}^S = \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}$; таким образом $\tau_2 < \tau_3$.

+

Следствие 9.7

Пусть

$$(i) \quad A_1^{1 \triangleleft \alpha_1}(\tau_1, \tau_2);$$

$$(ii) \quad \tau_3 \in \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1}), \quad \tau_3 \geq \tau_2;$$

(iii) матрица $\alpha S_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ на $\alpha_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ имеет производящий собственный диссеминатор

$$\check{\delta}_{\tau_3}^S \leq \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$$

ниже α_1 .

Тогда

$$1) \ a_{\tau}^{<\alpha_1} \equiv 1 \text{ on }]\tau_1, \tau_2[, \quad a_{\tau_3}^{<\alpha_1} = 0;$$

$$2) \ \check{\delta}_{\tau_3}^S \leq \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \quad \text{и}$$

$$3) \ Od\alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2) > Od(\alpha S_{\tau_3}^{<\alpha_1}).$$

Аналогично для производящего диссепинатора $\check{\delta}_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ матрицы $\alpha S_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ на $\alpha_{\tau_3}^{<\alpha_1}$.

Доказательство. Мы будем опускать верхние индексы $< \alpha_1$, $\triangleleft \alpha_1$. По лемме 9.5 для $S^3 = \alpha S_{\tau_3}^{<\alpha_1}$ условие (iii) влечёт, что для некоторого $\tau < \tau_2$

$$\forall \tau' \in [\tau, \tau_2[\quad a_{\tau'} \neq a_{\tau_3};$$

благодаря лемме 3.2 [29] это возможно только когда

$$\forall \tau' \in [\tau, \tau_2[\quad a_{\tau'} = 1, \quad a_{\tau_3} = 0,$$

а тогда по лемме 9.4 $a_{\tau} \equiv 1$ on $] \tau_1, \tau_2[$.

Если $\check{\delta}_{\tau_3}^S \in]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$, то можно получить $a_{\tau_3} = 1$, используя снова рассуждение из доказательства леммы 9.5, и продолжая утверждение (9.13) без его подформулы $S \triangleleft S^3$ диссепинатором $\check{\delta}_{\tau_3}^S$ до $\alpha_{\tau_3}^{\downarrow}$, а это влечёт $a_{\tau_3}^{<\alpha_1} = 1$.

После этого достаточно провести рассуждение из конца этого доказательства (случай 2.), буквально повторяя его посредством метода ограничения-и-повторения.

—

Немедленное следствие этой леммы для $\tau_2 = \tau_3$ составляет следующая

Теорема 1*Пусть*(i) $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ монотонна на $[\tau_1, \tau_2[$ ниже α_1 ;(ii) $\tau_1 = \min\{\tau :]\tau, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1})\}$.*Тогда*

$$]\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[\cap SIN_n^{<\alpha_1} = \emptyset.$$

Доказательство. Предположим, что наоборот – существует $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардинал $\gamma_{\tau'_2}^{<\alpha_1} \in]\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$.

Тогда кардинал $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ также принадлежит классу $SIN_n^{<\alpha_1}$; это можно увидеть, повторяя доказательство леммы 8.10. Таким образом, выполняется утверждение $A_1^{1<\alpha_1}(\tau_1, \tau'_2)$; остаётся применить следствие 9.7, используя τ'_2 как $\tau_2 = \tau_3$, так как $\delta_{\tau'_2}^S < \gamma_{\tau'_2}^{<\alpha_1}$ по определению.

—

10 Анализ немонотонности α -функции

Итак, всякий интервал монотонности α -функции не может быть “слишком длинным” по теореме 1.

Однако такая функция может быть определена на “довольно длинных” интервалах; например, функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ может быть определена на заключительном промежутке T^{α_1} для всякого достаточно большого SIN_n -кардинала $\alpha_1 < k$ (лемма 8.9). Следовательно, её монотонность нарушается на некоторых ординалах из такого промежутка.

Как это случается? В этом разделе анализируются все существенные случаи подобных нарушений. Для этого нужно вспомнить формулу $A_2^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ (см. определение 8.1 1.4 для $X_1 = \alpha S_f^{<\alpha_1}$):

$$A_1^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_3, \alpha S_f^{<\alpha_1}) \wedge \tau_1 + 1 < \tau_2 < \tau_3 \wedge$$

$$\wedge \tau_2 = \sup\{\tau < \tau_3 : \forall \tau', \tau'' (\tau_1 < \tau' < \tau'' < \tau \rightarrow \alpha S_{\tau'}^{<\alpha_1} \leq \alpha S_{\tau''}^{<\alpha_1})\}.$$

Здесь указывается, что τ_2 — это *минимальный* ординал, на котором нарушается монотонность функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ на интервале $[\tau_1, \tau_3[$. Таким образом, во всех рассуждениях этого параграфа рассматривается некоторая немонотонность $A_2^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ на интервалах $[\tau_1, \tau_3[$ в различных ситуациях (но условие $SIN_n^{\triangleleft\alpha_1}(\gamma_{\tau_3})$ может быть опущено везде, кроме последней леммы 10.5).

Лемма 10.1

Пусть

$$(i) \quad A_2^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3);$$

$$(ii) \quad SIN_n^{<\alpha_{\tau_2}^{\downarrow}} \cap \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \subseteq SIN_n^{<\alpha_1}.$$

Тогда

$$1) \ a_{\tau}^{<\alpha_1} \equiv 1 \quad \text{на} \]\tau_1, \tau_2[, \quad a_{\tau_2}^{<\alpha_1} = 0 \quad \text{и}$$

$$2) \ \tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} \leq \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}. \quad 13)$$

Доказательство. Верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ будут опускаться. Так как функция αS_f монотонна на $]\tau_1, \tau_2[$, то из теоремы 1 следует, что

$$]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[\cap SIN_n = \emptyset. \quad (10.1)$$

Стоя на кардинале $\alpha^2 = \alpha_{\tau_2}^{\downarrow}$ рассмотрим ниже α^2 функцию $\alpha S_f^{<\alpha^2}$. По условию (ii) и лемме 8.7 об абсолютности она совпадает с αS_f на $]\tau_1, \tau_2[$ и монотонна на этом интервале.

Поэтому $\tilde{\delta}_{\tau_2} \leq \gamma_{\tau_1}$, иначе $\tilde{\delta}_{\tau_2} \in]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ вопреки (ii), (10.1). Если теперь $a_{\tau_2} = 1$, то по лемме 9.2

$$Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_2) \leq Od(\alpha S_{\tau_2})$$

несмотря на (i) и поэтому $a_{\tau_2} = 0$. То же самое получается, если

$$\forall \tau < \tau_2 \quad \exists \tau' \in [\tau; \tau_2[\quad a_{\tau'} = 0,$$

так как в этом случае благодаря условию (i) можно рассмотреть $\tau_1^2 \in]\tau_1, \tau_2[$ такой, что для $S^2 = \alpha S_{\tau_2}$

$$a_{\tau_1^2} = 0, \quad \alpha S_{\tau_1^2} \geq S^2. \quad (10.2)$$

Благодаря заключению 2) и лемме 3.2 [29] об ограничении нулевая матрица S^2 получает некоторые допустимые носители $\alpha \in]\gamma_{\tau_1^2}, \gamma_{\tau_1^2+1}[$ как результат ограничения SIN_{n-1} -кардиналом $\gamma_{\tau_1^2+1}$ следующего Σ_{n-1} -утверждения

$$\exists \alpha \left(\gamma_{\tau_1^2} < \alpha \wedge \exists \delta, \alpha, \rho \left(\delta \leq \gamma_{\tau_1} \wedge SIN_n^{<\alpha^{\downarrow}}(\gamma_{\tau_1}) \wedge \right. \right. \quad (10.3)$$

$$\wedge \alpha \mathbf{K}_{n+1}^{\exists}(0, \delta, \gamma_{\tau_1^2}, \alpha, \rho, S^2)) \Big),$$

которое выполняется ниже $\gamma_{\tau_1^2+1}$, так как оно выполняется для $\alpha = \alpha_{\tau_2}$ ниже α_1 .

Следовательно, из (10.2), (10.3) следует, что матрица S^2 запрещается для определения матричного значения $\alpha S_{\tau_1^2}^2$ по определению 8.3 2).

Но это может случиться, только если S^2 на α подавлена для $\gamma_{\tau_1^2}$, что влечёт $SIN_n(\gamma_{\tau_1^2})$ вопреки (10.1).

Поэтому

$$\exists \tau < \tau_2 \ \forall \tau' \in [\tau, \tau_2[\ a_{\tau'} = 1,$$

и лемма 9.4 влечёт $a_{\tau} \equiv 1$ на $] \tau_1, \tau_2[$.

+

Отсюда и из теоремы 1 сразу же вытекает

Следствие 10.2

Пусть

$$(i) \ A_2^{\triangleleft \alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3);$$

$$(ii) \] \gamma_{\tau_1}^{< \alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{< \alpha_1}] \cap SIN_n^{< \alpha_1} \neq \emptyset.$$

Тогда

$$1) \ \gamma_{\tau_2}^{< \alpha_1} \text{ — это наследник кардинала } \gamma_{\tau_1}^{< \alpha_1} \text{ в } SIN_n^{< \alpha_1};$$

$$2) \ a_{\tau}^{< \alpha_1} \equiv 1 \text{ на }] \tau_1, \tau_2[, \ a_{\tau_2}^{< \alpha_1} = 0 \quad u$$

$$3) \ \tilde{\delta}_{\tau_2}^{< \alpha_1} \leq \gamma_{\tau_1}^{< \alpha_1}. \quad 14)$$

+

Лемма 10.3

Пусть

$$(i) \ A_2^{\triangleleft \alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3);$$

$$(ii) \ a_{\tau_2}^{<\alpha_1} = 1.$$

Тогда для кардинала предскачка $\alpha^2 = \alpha_{\tau_2}^{<\alpha_1 \downarrow}$ существует ординал

$$\tau_* = \min\{\tau \in]\tau_1, \tau_2[: \gamma_\tau^{<\alpha_1} \in SIN_n^{<\alpha^2}\}$$

такой, что:

- 1) $\gamma_{\tau_*}^{<\alpha_1} < \tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1}$, $\gamma_{\tau_*}^{<\alpha_1} \notin SIN_n^{<\alpha_1}$;
- 2) $a_\tau^{<\alpha^2} \equiv a_\tau^{<\alpha_1} \equiv 1$ on $] \tau_1, \tau_*[$;
- 3) $\alpha S_f^{<\alpha^2}$ монотонна на $[\tau_1, \tau_*[$ и
- 4) $Od \alpha S_f^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_*) > Od(\alpha S_{\tau_2}^{<\alpha_1})$.

Доказательство. Верхние индексы $< \alpha_1$, $\triangleleft \alpha_1$ будут опускаться. Во-первых, нужно отметить, что $\gamma_{\tau_1} < \tilde{\delta}_{\tau_2}$, иначе (ii) и лемма 9.2 нарушают условие (i).

Затем, из леммы 10.1 и условий (i), (ii) следует, что имеется следующий ординал ниже кардинала предскачка $\alpha^2 = \alpha_{\tau_2}^{\downarrow}$:

$$\tau_* = \min\{\tau > \tau_1 : \gamma_\tau \in (SIN_n^{<\alpha^2} - SIN_n)\}.$$

На интервале $[\tau_1, \tau_*[$ функция αS_f монотонна и по теореме 1 (для α^2 вместо α_1) кардинал γ_{τ_*} является наследником γ_{τ_1} в классе $SIN_n^{<\alpha^2}$. Благодаря лемме 9.3 функция αS_f стабилизируется на интервале $[\tau_1, \tau_*[$, поэтому для некоторых $\tau_0 \in]\tau_1, \tau_*[$ и S^0 выполняется утверждение $\forall \tau \geq \tau_0 \ \alpha S_\tau = S^0$ ниже γ_{τ_*} . Следовательно, ниже γ_{τ_*} справедливо более слабое утверждение:

$$\forall \tau \left(\tau_0 < \tau \rightarrow \exists S (S = \alpha S_\tau \wedge S \geq S^0) \right).$$

Оно может быть сформулировано в Π_n -форме, как это было сделано в доказательстве леммы 9.3 посредством утверждения

(9.4), где $\tau_{1,3}^n$, $\alpha S_{\tau_2}^1$ следует заменить на τ_0 , S^0 соответственно.

Затем кардинал γ_{τ_*} продолжает это утверждение до α^2 и поэтому по условию (i)

$$\rho = Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_*) > Od(\alpha S_{\tau_2}).$$

Далее, обсудим единичную характеристику. Лемма 3.2 [29] и условия (i), (ii) влекут, что существуют некоторые допустимые носители α -матриц единичной характеристики, расположенные конфинально кардиналу γ_{τ_1} , как это происходило несколько раз выше. Поэтому такие носители должны быть также в интервале $]\gamma_{\tau_*}, \alpha^2[$, иначе кардинал γ_{τ_*} был бы определим ниже α^2 вместе с ординалом ρ , а тогда по лемме 4.6 [29] получается противоречие:

$$\rho < Od(\alpha S_{\tau_2}).$$

Осталось применить лемму 3.2 [29], 9.4 (где τ_* , α^2 играют роль τ_2 , α_1 соответственно) что завершает доказательство, так как $\alpha S_f^{<\alpha^1}$, $a_f^{<\alpha^1}$ совпадают с $\alpha S_f^{<\alpha^2}$, $a_f^{<\alpha^2}$ на $[\tau_1, \tau_*[$ согласно лемме 8.7 об абсолютности.

—

С помощью рассуждений, вполне аналогичных доказательствам лемм 10.1-10.3, легко устанавливается

Лемма 10.4

Пусть

- (i) $A_2^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$;
- (ii) $\forall \gamma < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \exists \tau (\gamma < \gamma_{\tau}^{<\alpha^2} \wedge a_{\tau}^{<\alpha^2} = 1)$ для $\alpha^2 = \alpha_{\tau_2}^{<\alpha_1 \downarrow}$;
- (iii) $a_{\tau_2}^{<\alpha_1} = 0$.

Тогда

- 1) $\tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} \leq \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ и
- 2) $\exists \tau \in]\tau_1, \tau_2[\quad (a_\tau^{<\alpha_1} = 1 \wedge \alpha S_\tau^{<\alpha_1} > \alpha S_{\tau_2}^{<\alpha_1}).$ ¹⁵⁾

Доказательство. Верхние индексы $< \alpha_1$, $\triangleleft \alpha_1$ будут опускаться. Как обычно, рассмотрим ситуацию ниже, стоя на $\alpha^2 = \alpha_{\tau_2}^\downarrow$. Предположим, что $\tilde{\delta}_{\tau_2} \in]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$; здесь достаточно рассмотреть следующие два случая:

Случай 1. $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[\cap SIN_n^{<\alpha^2} \subseteq SIN_n$, тогда снова (буквально как это было в доказательстве теоремы 1) функция αS_f монотонна на интервале $[\tau_1, \tau_2[$, в то время как интервал $]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ содержит SIN_n -кардинал $\tilde{\delta}_{\tau_2}$, в противоречии с теоремой 1.

Случай 2. $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[\cap SIN_n^{<\alpha^2} \not\subseteq SIN_n$. В этом случае нужно снова применить технику ограничения-и-продолжения, буквально как это было сделано в доказательстве части 1а. леммы 9.4. Сначала повторим аргумент из доказательства леммы 10.3 касательно функции αS_f , определённой на интервале $]\tau_1, \tau_*[$, где

$$\gamma_{\tau_*} = \min \left(SIN_n^{<\alpha^2} - SIN_n \right) \quad \text{и} \quad a_\tau \equiv 1 \quad \text{on} \quad]\tau_1, \tau_*[$$

благодаря условию (ii). По теореме 1. (для τ_* , α^2 как τ_2 , α_1) и условию (i), кардинал γ_{τ_*} является наследником кардинала γ_{τ_1} в $SIN_n^{<\alpha^2}$. Следовательно, утверждение

$$\forall \tau > \tau_1 \quad a_\tau = 1$$

выполняется ниже γ_{τ_*} ; в этом нетрудно убедиться с помощью условия (ii) и лемм 3.2 [29], 9.4. Это условие можно сформулировать в Π_n -форме буквально как это было сделано в доказательстве части 1а. леммы 9.4 с τ^3 как τ_1 :

$$\forall \gamma \left(\gamma_{\tau_1} < \gamma \wedge SIN_{n-1}(\gamma) \longrightarrow \right. \\ \left. \longrightarrow \exists \delta, \alpha, \rho, S \left(SIN_n^{<\alpha^\downarrow}(\gamma_{\tau_1}) \wedge \alpha \mathbf{K}_{n+1}^\exists(1, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \right) \right).$$

После этого $SIN_n^{<\alpha^2}$ -кардинал γ_{τ_*} продолжает это предложение до α^2 и поэтому $a_{\tau_2} = 1$ вопреки условию (iii). Итак, $\delta_{\tau_2} \leq \gamma_{\tau_1}$; для завершения доказательства следует применить лемму 9.2. Предположим, что

$$\exists \tau \in]\tau_1, \tau_2[\quad \forall \tau' \in [\tau, \tau_2[\quad a_{\tau'} = 0,$$

тогда по этой лемме монотонность функции αS_f на $]\tau_1, \tau_2[$ влечёт

$$Od \alpha S_f(\tau_1, \tau_2) \leq Od(\alpha S_{\tau_2}),$$

нарушая условие (i). Это противоречие вместе с (i) устанавливает 2) и завершает доказательство этой леммы.

+

Следующая лемма будет использована в конце доказательства основной теоремы, снова полагаясь на формулу $A^{0<\alpha_1}(\tau)$ (напомним определение 8.1 3.2):

$$\exists \gamma < \alpha_1 \left(\gamma = \gamma_\tau^{<\alpha_1} \wedge \neg \exists a, \delta, \alpha, \rho < \alpha_1 \exists S \triangleleft \rho \left(\mathbf{K}_n^{\forall < \alpha_1}(\gamma, \alpha_\chi^\downarrow) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \wedge \alpha \mathbf{K}_{n+1}^{\exists < \alpha_1}(a, \delta, \gamma, \alpha, \rho, S) \right) \right),$$

означающую, что не существует α -матрицы на каком-то носителе $\alpha > \gamma_\tau^{<\alpha_1}$, допустимой для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 . Соответственно, через $A_1^{0<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1})$ обозначается формула (напомним определение 8.1 1.1 для $X_1 = \alpha S_f^{<\alpha_1}$):

$$A^{0<\alpha_1}(\tau_1) \wedge A_1^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1});$$

также будет использоваться формула $A_2^{0\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau'_2, \tau_3, \alpha S_f^{\triangleleft\alpha_1})$ (напомним определение 8.2 3.3):

$$A^{0\triangleleft\alpha_1}(\tau_1) \wedge A_2^{\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau'_2, \tau_3, \alpha S_f^{\triangleleft\alpha_1}).$$

Лемма 10.5

Пусть

$$(i) \quad A_1^{0\triangleleft\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{\triangleleft\alpha_1});$$

(ii) $\tau_2 \leq \tau_3$ и S^3 это матрица характеристики a^3 на носителе

$$\alpha_3 \in]\gamma_{\tau_3}^{\triangleleft\alpha_1}, \alpha_1[$$

сохраняющая $SIN_n^{\triangleleft\alpha_1}$ -кардиналы $\leq \gamma_{\tau_2}^{\triangleleft\alpha_1}$ ниже α_1 и обладающая производящим собственным диссеминатором $\check{\delta}^{S^3}$;

$$(iii) \quad \check{\delta}^{S^3} \leq \gamma_{\tau_1}^{\triangleleft\alpha_1}.$$

Тогда $a^3 = 0$.

Аналогично для всякого диссеминатора $\tilde{\delta}$ матрицы S^3 на α^3 с любой базой $\rho \geq \rho^{S^3}$.

Доказательство. Как обычно, мы будем исследовать ситуацию ниже, стоя на кардинале предскачка $a^3 = \alpha_3^\downarrow$ и рассматривая диссеминатор $\check{\delta}^{S^3}$ с базой данных $\rho^3 = \rho^{S^3} = \hat{\rho}_1$, $\rho_1 = Od(S^3)$; верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ будут опускаться для некоторого удобства.

Допустим, что эта лемма неверна и $a^3 = 1$, тогда $\check{\delta}^{S^3}$ допустимый и неподавленный диссеминатор матрицы S^3 на α_3 для каждого $\gamma_\tau \in]\tau_1, \tau_3[$ и по лемме 9.2 $a_\tau \equiv 1$ на $]\tau_1, \tau_2[$ и

$$Od\alpha S_f(\tau_1, \tau_2) \leq Od(\alpha S_{\tau_3}).$$

Из леммы 9.5 следует, что благодаря условию (iii) функция αS_f немонотонна на $[\tau_1, \tau_2[$ (напомним случай 2. в доказательстве пункта 3. леммы 9.5) и поэтому существует τ'_2 , для которого выполняется

$$A_2^0(\tau_1, \tau'_2, \tau_2). \quad (10.4)$$

Теперь следует повторить рассуждение из случая 1b. доказательства леммы 9.4. Ниже α^3 справедливо следующее Σ_{n+1} -утверждение по лемме 8.7 об абсолютности (напомним (9.8)):

$$\begin{aligned} \exists \gamma^0 \exists \tau'_1, \tau''_2, \tau'_3 < \gamma^0 \left(SIN_n(\gamma^0) \wedge \gamma_{\tau'_1}^{<\gamma^0} < \gamma_{\tau''_2}^{<\gamma^0} < \gamma_{\tau'_3}^{<\gamma^0} < \gamma^0 \wedge \right. \\ \left. \wedge A_2^{0 \triangleleft \gamma^0}(\tau'_1, \tau''_2, \tau'_3, \alpha S_f^{<\gamma^0}) \wedge \forall \tau''' \in]\tau'_1, \tau''_2] a_{\tau'''}^{<\gamma^0} = 1 \wedge \right. \\ \left. \wedge \alpha S_{\tau''_2}^{<\gamma^0} = \alpha S_{\tau'_2} \right). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Оно содержит индивидные константы $< \rho^3$ и $\alpha S_{\tau'_2} \triangleleft \rho^3$, поэтому диссеминатор $\check{\delta}^{S^3}$ ограничивает это предложение и оно выполняется уже ниже $\check{\delta}^{S^3}$.

Теперь перейдём к ситуации ниже кардинала предскачка $\alpha^2 = \alpha_{\tau'_2}^{\downarrow}$ единичной матрицы $\alpha S_{\tau'_2}$ на носителе $\alpha_{\tau'_2}$. По условию (i) $\gamma_{\tau_1} \in SIN_n$, поэтому по лемме 8.5 1) получается $\gamma_{\tau_1} \in SIN_n^{<\alpha^3}$. Так как $\check{\delta}^{S^3} \leq \gamma_{\tau_1}$ и $\check{\delta}^{S^3} \in SIN_n^{<\alpha^3}$, то лемма 3.8 [29] (для α^3 , γ_{τ_1} как α_1 , α_2) влечёт $\check{\delta}^{S^3} = \gamma_{\tau_1}$ или $\check{\delta}^{S^3} \in SIN_n^{<\gamma_{\tau_1}}$; затем из той же леммы (для γ_{τ_1} как α_2) вытекает $\check{\delta}^{S^3} \in SIN_n$.

Отсюда и из леммы 8.5 1) следует $\check{\delta}^{S^3} \in SIN_n^{<\alpha^2}$; значит, в утверждении (10.5) можно заменить γ^0 на α^2 по лемме 8.7 об абсолютности, а тогда по лемме 8.5 5) (для $\alpha_{\tau'_2}$ как α) мы получаем противоречие: $a_{\tau'_2} = 0$ вопреки тому, что $a_\tau \equiv 1$ на всём интервале $]\tau_1, \tau_2[$.

—

Теперь специальная теория матричных функций разработана достаточно для того, чтобы приступить к доказательству основной теоремы.

Глава III

Приложения специальной теории

11 Доказательство основной теоремы

Противоречие, доказывающее основную теорему, достигается следующим диагональным рассуждением:
С одной стороны, по лемме 8.9 функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на непустом множестве

$$T^{\alpha_1} = \{\tau : \alpha\delta^* < \gamma_\tau < \alpha_1\}$$

для каждого достаточно большого кардинала $\alpha_1 \in SIN_n$.
Её монотонность на этом множестве исключена по теореме 1.
Но с другой стороны, эта монотонность устанавливается следующей теоремой для каждого SIN_n -кардинала $\alpha_1 > \alpha\delta^*$ всякой достаточно большой конфинальности. Напомним, что ограничивающие кардиналы α_1 всегда предполагаются эквивинформативными с χ^* , то есть что всегда выполняется $A_6^e(\chi^*, \alpha_1)$ (см. определение 8.1 5.1 для $\chi = \chi^*$, $\alpha^0 = \alpha_1$).

Теорема2.

Пусть функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на непустом множестве

$$T^{\alpha_1} = \{\tau : \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} < \gamma_\tau^{<\alpha_1} < \alpha_1\}$$

таком, что $\alpha_1 < k$ и:

$$(i) \quad \tau_1 = \min\{\tau : \forall \tau' (\gamma_\tau^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau'}^{<\alpha_1} \longrightarrow \tau' \in \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1}))\};$$

$$(ii) \sup SIN_n^{<\alpha_1} = \alpha_1;$$

$$(iii) cf(\alpha_1) \geq \chi^{*+}.$$

Тогда эта функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ монотонна на этом множестве:

$$\forall \tau_1, \tau_2 \in T^{\alpha_1} (\tau_1 < \tau_2 \rightarrow \alpha S_{\tau_1}^{<\alpha_1} \leq \alpha S_{\tau_2}^{<\alpha_1}).$$

Доказательство. План этого доказательства состоит в следующем:

Рассуждение будет проводиться индукцией по кардиналу α_1 . Предположим, что эта теорема неверна и кардинал α_1^* — минимальный, нарушающий эту теорему, то есть функция $\alpha S_f^{<\alpha_1^*}$ немонотонна на множестве

$$T^{\alpha_1^*} = \{ \tau : \gamma_{\tau_1^*}^{<\alpha_1^*} < \gamma_{\tau}^{<\alpha_1^*} < \alpha_1^* \}$$

с указанными свойствами (i)–(iii) для некоторого τ_1^* ; таким образом, принимается первая индуктивная гипотеза:

для каждого $\alpha_1 < \alpha_1^*$ функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ монотонна на множестве T^{α_1} со свойствами (i)–(iii).

Из теоремы 1 сразу же следует, что этот α_1^* — это просто минимальный кардинал α_1 , для которого такое множество T^{α_1} существует, потому что для каждого $\alpha_1 < \alpha_1^*$ это множество не существует, так как функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ на таком T^{α_1} немонотонна по теореме 1 и в то же время монотонна по первой индуктивной гипотезе о минимальности α_1^* .

Всё рассуждение будет проводиться ниже α_1^* (и все переменные будут ограничиваться этим α_1^*), или ниже ограничивающих кардиналов $\alpha_1 \leq \alpha_1^*$, поэтому верхние индексы $< \alpha_1^*$, $\triangleleft \alpha_1^*$ будут опускаться для некоторого удобства вплоть до конца доказательства теоремы 2.

Сначала отметим, что в условиях теоремы 2 выполняется

$$\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \in SIN_n^{<\alpha_1};$$

чтобы убедиться в этом достаточно ещё раз повторить аргумент, уже применённый выше несколько раз (сначала в доказательствах лемм 7.7, 8.10). Благодаря этому нетрудно видеть, что для *каждого* достаточно большого ординала $\tau_3^* \in T^{\alpha_1^*}$ интервал $[\gamma_{\tau_1}^*, \gamma_{\tau_3}^*[$ может рассматриваться *как блок*, то есть существуют некоторые ординалы $\tau_1^{*'}, \tau_2^*, \eta^{*3}$ которые выполняют утверждение (напомним определение 8.1 1.6 для $X_1 = \alpha S_f$, $X_2 = a_f$):

$$A_4^b(\tau_1^*, \tau_1^{*'}, \tau_2^*, \tau_3^*, \eta^{*3}, \alpha S_f, a_f).$$

Здесь (согласно этому определению 8.1) $\tau_1^{*'}$ это индекс матрицы $\alpha S_{\tau_1^{*'}}$ *единичной характеристики* $a_{\tau_1^{*'}} = 1$ на её носителе $\alpha_{\tau_1^{*'}}$ и η^{*3} — тип этого интервала.

Далее, благодаря условию (iii) этой теоремы 2 мы можем использовать индекс $\tau_3^* \in T^{\alpha_1^*}$ такой, что интервал $[\gamma_{\tau_1}^*, \gamma_{\tau_3}^*[$ имеет именно тип

$$\eta^{*3} > Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}}), \quad \eta^{*3} < \chi^{*+}.$$

Теперь формула \mathbf{K}^0 начинает действовать и *закрывает диагональное рассуждение*:

Рассмотрим матрицу $\alpha S_{\tau_3^*}$ на носителе $\alpha_{\tau_3^*}$ вместе с её диссеминатором $\tilde{\delta}^{*3} = \tilde{\delta}_{\tau_3^*}^*$ и базой данных $\rho^{*3} = \rho_{\tau_3^*}^*$; мы увидим, что по лемме 10.5 она имеет *нулевую* характеристику на этом носителе.

Стоя на кардинале предскачка $\alpha^{*3} = \alpha_{\tau_3^*}^\downarrow$ следует рассмотреть ситуацию ниже этого α^{*3} :

Почти очевидно, что по лемме 8.8 диссеминатор $\tilde{\delta}^{*3}$ попадает в некоторый *максимальный* блок $[\gamma_{\tau_1}^*, \gamma^{*3}[$ ниже α^{*3} типа

$\eta^{*3'} < \chi^{*+}$, где γ^{*3} это некоторый $\gamma_{\tau_3^{*'}}^{<\alpha^{*3}}$. Нетрудно видеть, что

$$\gamma_{\tau_3^*} \leq \gamma^{*3} \quad \wedge \quad \eta^{*3} \leq \eta^{*3'},$$

поэтому выполняется

$$A_4^{Mb \triangleleft \alpha^{*3}}(\tau_1^*, \tau_1^{*'}, \tau_2^*, \tau_3^{*'}, \eta^{*3'}, \alpha S_f^{<\alpha^{*3}}, a_f^{<\alpha^{*3}}).$$

Вс эти факты вместе составляют посылку леммы 8.5 6):

$$\begin{aligned} a_{\tau_3^*} = 0 \wedge \gamma_{\tau_1^*}^{<\alpha^{*3}} \leq \tilde{\delta}^{*3} < \gamma_{\tau_3^{*'}}^{<\alpha^{*3}} \wedge \\ \wedge A_4^{Mb \triangleleft \alpha^{*3}}(\tau_1^*, \tau_1^{*'}, \tau_2^*, \tau_3^{*'}, \eta^{*3'}, \alpha S_f^{<\alpha^{*3}}, a_f^{<\alpha^{*3}}). \end{aligned}$$

Следовательно, эта лемма влечёт

$$\eta^{*3'} < \rho^{*3} \vee \rho^{*3} = \chi^{*+}$$

и во всяком случае

$$Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}}) < \eta^{*3} \leq \eta^{*3'} < \rho^{*3}.$$

Но мы увидим скоро, что это невозможно, так как по лемме 9.5 о срезании лестницы сверху и по лемме 11.3 (установленной ниже) выполняется:

$$\rho^{*3} \leq Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}}).$$

Это противоречие завершит доказательство теоремы 2.

Чтобы осуществить изложенный план нужна некоторая дополнительная информация.

Рассуждение, описанное выше, полагается на следующие несложные вспомогательные леммы 11.1, 11.3, которые представляют

собой его “несущую конструкцию” и описывают некоторые существенные свойства поведения нулевых матриц; они не были представлены ранее по причине их довольно специального характера. С этой целью следует вспомнить формулу (см. определение 8.1 1.1 для $X_1 = \alpha S_f^{<\alpha_1}$)

$$A_1^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2, \alpha S_f^{<\alpha_1}):$$

$$\tau_1 + 1 < \tau_2 \wedge \tau_1 = \min\{\tau :]\tau, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1})\}$$

$$\wedge \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \in \text{SIN}_n^{<\alpha_1} \wedge \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \in \text{SIN}_n^{<\alpha_1};$$

Напомним также, что мы часто опускаем обозначения функций $\alpha S_f^{<\alpha_1}$, $a_f^{<\alpha_1}$ в написаниях формул ниже α_1 ; напомним также, что тип интервала $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ ниже α_1 – это тип множества (см. определение 8.1 1.3):

$$\{\gamma : \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} < \gamma < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \wedge \text{SIN}_n^{<\alpha_1}(\gamma)\}.$$

Предварительно следует остановиться на следующих дополнительных аргументах, удобных для сокращения последующих рассуждений; с этой целью нужно ввести такие понятия:

Интервал $[\tau_1, \tau_2[$ и соответствующий интервал $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$ будут называться интервалами матричной допустимости, или просто *интервалами допустимости*, ниже α_1 , если для каждого $\tau' \in]\tau_1, \tau_2[$ существует некоторая α -матрица S на некотором носителе $> \gamma_{\tau'}^{<\alpha_1}$, *допустимом* для $\gamma_{\tau'}^{<\alpha_1}$ ниже α_1 :

$$\forall \tau' \in]\tau_1, \tau_2[\exists a', \delta', \alpha', \rho', S' \alpha \mathbf{K}^{<\alpha_1}(a', \delta', \gamma_{\tau'}^{<\alpha_1}, \alpha', \rho', S'),$$

и $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \in \text{SIN}_n$, $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \in \text{SIN}_n$ и τ_1 – это минимальный ординат с этими свойствами.

Затем, нужно обратиться к следующим свойствам произвольной нулевой матрицы S на её носителе α , допустимыми для

$\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе со своими минимальным допустимым диссеминатором $\tilde{\delta}$ с базой ρ ниже α_1 для $\alpha_1 \leq \alpha_1^*$:

(1a.) если $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1} \leq \gamma_\tau^{<\alpha_1}$ и $\tilde{\delta}$ попадает в интервал допустимости $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}[$, то есть $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \leq \tilde{\delta} < \gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$, то $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} = \tilde{\delta}$;

(1b.) если существует некоторая нулевая матрица S^1 на некотором другом носителе $\alpha^1 \neq \alpha$, тоже допустимая для того же $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе с своими минимальным допустимым диссеминатором $\tilde{\delta}^1$ с базой ρ^1 , то S на α *неподавлена* для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе со своими $\tilde{\delta}$, ρ ниже α_1 .

Проверка этих свойств будет проводиться индукцией по тройкам (α_1, α, τ) , упорядоченным канонически как обычно (с α_1 как первым компонентом, α – вторым и с τ – третьим).

Предположим, тройка $(\alpha_1^0, \alpha^0, \tau^0)$ – минимальная нарушающая (1a.) или (1b.); таким образом принимается *вторая индуктивная гипотеза*:

для всякой меньшей тройки (α_1, α, τ) выполняются (1a.) и (1b.). Мы увидим, что это вызывает противоречия; предстоящее доказательство этого будет проводиться ниже α_1^0 , поэтому верхние индексы $< \alpha_1^0, \triangleleft \alpha_1^0$ как обычно будут опускаться (вплоть до специального замечания, если контекст не укажет явно на другой случай).

1. Начнём со свойства (1a.); допустим, оно нарушается, то есть существует нулевая матрица S^0 на её носителе $\alpha^0 > \gamma_{\tau^0}$ с её минимальным диссеминатором $\tilde{\delta}^0$ с базой ρ^0 , все допустимые для γ_{τ^0} , и $\tilde{\delta}^0$ попадает в интервал допустимости $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau_2^0}[$, но

$$\gamma_{\tau_1^0} < \tilde{\delta}^0 < \gamma_{\tau_2^0} \leq \gamma_{\tau^0} , \quad \text{то есть} \quad \tilde{\delta}^0 = \gamma_{\tau_3^0} , \quad \tau_1^0 < \tau_3^0 < \tau_2^0 . \quad (11.1)$$

Отсюда и из леммы 3.8 [29] немедленно следует, что

$$\tilde{\delta}^0 \in SIN_n ,$$

так как $\check{\delta}^0 < \gamma_{\tau_2^0}$, $\check{\delta}^0 \in SIN_n^{<\alpha^{0\downarrow}}$, $\gamma_{\tau_2^0} \in SIN_n$.

По определению интервала допустимости существует некоторая матрица $\alpha S_{\tau_3^0}$ на её носителе $\alpha_{\tau_3^0}$, допустимые для $\gamma_{\tau_3^0}$ вместе с её минимальным диссеминатором $\check{\delta}_{\tau_3^0}$ с базой $\rho_{\tau_3^0}$ (всё это ниже α_1^0).

Из второй индуктивной гипотезы следует, что можно рассматривать $\check{\delta}_{\tau_3^0} = \gamma_{\tau_1^0}$; поэтому из леммы 3.2 [29] следует, что для каждого $\gamma_\tau \in]\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau_3^0}[$ матрица $\alpha S_{\tau_3^0}$ обладает многими носителями $\alpha \in]\gamma_\tau, \gamma_{\tau+1}[$, допустимыми для γ_τ , которые неподдавлены для этого γ_τ благодаря той же индуктивной гипотезе, поэтому выполняется утверждение $A_1^0(\tau_1^0, \tau_3^0, \alpha S_f^{<\alpha_1^0})$:

$$A^0(\tau_1^0) \wedge A_1(\tau_1^0, \tau_3^0, \alpha S_f^{<\alpha_1^0})$$

ниже α_1^0 . Те же аргументы действуют ниже кардинала предскачка $\alpha^{0\downarrow}$, поэтому ниже $\alpha^{0\downarrow}$ также выполняется:

$$A_1^{0<\alpha^{0\downarrow}}(\tau_1^0, \tau_3^0, \alpha S_f^{<\alpha^{0\downarrow}}).$$

Для производящего диссеминатора $\check{\delta}^0$ матрицы S^0 на α^0 с той же базой ρ^0 это влечёт:

$$\check{\delta}^0 \leq \gamma_{\tau_1^0}, \quad (11.2)$$

так как в противном случае $\check{\delta}^0$ попадает строго в интервал допустимости $]\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau_2^0}[$:

$$\gamma_{\tau_1^0} < \check{\delta}^0 \leq \gamma_{\tau_3^0}, \quad (11.3)$$

а тогда $\check{\delta}^0$ продолжает до $\alpha^{0\downarrow}$ Π_{n+1} -предложение о допустимости некоторых матриц для каждого $\gamma_\tau^{<\alpha^{0\downarrow}} > \gamma_{\tau_1^0}$ например так, как это было сделано в доказательстве леммы 7.5 1), где в формуле (7.2) нужно теперь связать ρ^4 , S^4 кванторами

существования. Такие матрицы становятся даже неподавленными для всех таких $\gamma_\tau^{<\alpha^{0\Downarrow}}$ по второй индуктивной гипотезе (всё это ниже $\alpha^{0\Downarrow}$); следовательно, возникает множество $T^{\alpha^{0\Downarrow}}$ со свойствами (i)–(iii), указанными в теореме 2, в противоречии с первой индуктивной гипотезой и теоремой 1, то есть с минимальностью α_1^* .

Начиная с этого места рассуждение переходит к ситуации ниже $\alpha^{0\Downarrow}$ и верхние индексы $<\alpha^{0\Downarrow}$, $\triangleleft \alpha^{0\Downarrow}$ будут опускаться.

Ниже $\alpha^{0\Downarrow}$ функция αS_f определена на интервале $]\tau_3^0, \tau_3^1[$, где $\gamma_{\tau_3^1}$ наследник кардинала $\tilde{\delta}^0$ в SIN_n , по лемме 8.7 об абсолютности. Отсюда и из (11.2) следует

$$\tau_3^0 \notin \text{dom}(\alpha S_f), \quad (11.4)$$

иначе снова возникает (11.3), или $\tilde{\delta}^0 = \gamma_{\tau_1^0}$ как результат минимизации $\tilde{\delta}^0$ внутри $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau_3^0}[$ в противоречии с предположением (всё это ниже $\alpha^{0\Downarrow}$).

Но (11.4) возможно только если допустимая матрица $\alpha S_{\tau_3^0}$ *подавлена* для $\gamma_{\tau_3^0}$, то есть если выполняется условие подавления $A_5^{S,0}$ для $\alpha S_{\tau_3^0}$ на $\alpha_{\tau_3^0}$ характеристики $a_{\tau_3^0}$ с базой $\rho_{\tau_3^0}$ (см. определение 8.1 2.6) ниже $\alpha^{0\Downarrow}$, — и теперь все ограничения нужно подробно указать:

$$\begin{aligned} a_{\tau_3^0} = 0 \wedge SIN_n^{<\alpha^{0\Downarrow}}(\gamma_{\tau_3^0}) \wedge \rho_{\tau_3^0} < \chi^{*+} \wedge \sigma(\chi^*, \alpha_{\tau_3^0}, S_{\tau_3^0}) \wedge \\ \wedge \exists \eta^* < \gamma_{\tau_3^0} \left(A_{5.4}^{sc \triangleleft \alpha^{0\Downarrow}}(\gamma_{\tau_3^0}, \eta^*, \alpha S_f^{<\alpha^{0\Downarrow}} | \tau_3^0, a_f^{<\alpha^{0\Downarrow}} | \tau_3^0) \wedge \right. \\ \wedge \forall \tau' (\gamma_{\tau_3^0} < \gamma_{\tau'}^{<\alpha^{0\Downarrow}} \wedge SIN_n^{<\alpha^{0\Downarrow}}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha^{0\Downarrow}}) \rightarrow \\ \rightarrow \exists \alpha', S' [\gamma_{\tau'}^{<\alpha^{0\Downarrow}} < \alpha' < \gamma_{\tau'+1}^{<\alpha^{0\Downarrow}} \wedge SIN_n^{<\alpha'^{\Downarrow}}(\gamma_{\tau'}^{<\alpha^{0\Downarrow}}) \wedge \sigma(\chi^*, \alpha', S') \wedge \\ \left. \wedge A_{5.5}^{sc \triangleleft \alpha^{0\Downarrow}}(\gamma_{\tau_3^0}, \eta^*, \alpha'^{\Downarrow}, \alpha S_f^{<\alpha'^{\Downarrow}}, a_f^{<\alpha'^{\Downarrow}}) \right] \Big). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Следовательно, существуют кардиналы

$$\gamma^m < \gamma^* \leq \gamma_{\tau_1^0} < \gamma_{\tau_3^0} \text{ и предельный тип } \eta^*,$$

которые выполняют все составляющие его условия $A_{5.1}^{sc} - A_{5.5}^{sc}$ ниже $\alpha^{0\Downarrow}$ (см. определение 8.1 2.1–2.5); в частности, интервал $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau_3^0}[$ является блоком типа η^* благодаря условию

$$A_4^{b < \alpha^{0\Downarrow}}(\tau_1^0, \tau_3^0, \eta^*, \alpha S_f^{< \alpha^{0\Downarrow}} | \tau_3^0, a_f^{< \alpha^{0\Downarrow}} | \tau_3^0)$$

из условия $A_{5.4}^{sc}$ (см. определение 8.1 2.4, 2.3). Более того, существует *последующий за ним* максимальный блок

$$[\gamma_{\tau_3^0}, \gamma_{\tau_2^0}^{< \alpha^{0\Downarrow}}[\text{ типа } \geq \eta^* \text{ ниже } \alpha^{0\Downarrow}. \quad (11.6)$$

Действительно, рассмотрим кардинал

$$\gamma' = \gamma_{\tau_2'}^{< \alpha^{0\Downarrow}} \in SIN_n^{< \alpha^{0\Downarrow}}, \tau_2' > \tau_2$$

такой, что ниже $\alpha^{0\Downarrow}$

$$\tau_2' \notin \text{dom}(\alpha S_f^{< \alpha^{0\Downarrow}}). \quad (11.7)$$

Тогда согласно (11.5) существует некоторая сингулярная матрица S' на её носителе $\alpha' > \gamma'$ с кардиналом предскачка α'^{\Downarrow} , сохраняющим все $SIN_n^{< \alpha^{0\Downarrow}}$ -кардиналы $\leq \gamma'$ и выполняющим ниже α'^{\Downarrow} условие (напомним определение 8.1 2.5):

$$A_{5.5}^{sc}(\gamma_{\tau_3^0}, \eta^*, \alpha'^{\Downarrow}, \alpha S_f^{< \alpha'^{\Downarrow}}, a_f^{< \alpha'^{\Downarrow}});$$

оно означает, что весь интервал $[\gamma_{\tau_3^0}, \alpha'^{\Downarrow}[$ покрыт блоками типов $\geq \eta^*$ ниже α'^{\Downarrow} . Среди них имеется *последующий* блок

$$[\gamma_{\tau_3^0}, \gamma_{\tau_2'}^{< \alpha'^{\Downarrow}}[\text{ типа } \geq \eta^*,$$

поэтому можно рассмотреть его подблок $[\gamma_{\tau_3^0}, \gamma_{\tau_2^4}^{<\alpha'^\Downarrow}]$ в точности типа η^* .

Напомним, тип η^* – предельный, поэтому для каждого γ_τ из этого подблока существует много разных матричных носителей, допустимых для таких γ_τ по лемме 3.2 [29] об ограничении; благодаря второй индуктивной гипотезе все они подавлены для всех соответствующих γ_τ – и всё это ниже α'^\Downarrow . Тот же аргумент действует ниже $\alpha^{0\Downarrow}$ и мы возвращаемся к ситуации ниже этого кардинала. Из (11.7) следует

$$\gamma_{\tau_2^4}^{<\alpha'^\Downarrow} = \gamma_{\tau_2^4}^{<\alpha^{0\Downarrow}}, \quad \gamma_{\tau_2^4}^{<\alpha^{0\Downarrow}} \in SIN_n^{<\alpha^{0\Downarrow}},$$

поэтому интервал $[\gamma_{\tau_3^0}, \gamma_{\tau_2^4}^{<\alpha^{0\Downarrow}}]$ действительно является блоком типа η^* , но уже ниже $\alpha^{0\Downarrow}$, который содержит допустимый диссеминатор $\tilde{\delta}^0$ матрицы S^0 на α^0 .

Но это составляет противоречие. С одной стороны, матрица S^0 допустима для γ_{τ^0} и тогда согласно замыкающему условию \mathbf{K}^0 она имеет диссеминатор $\tilde{\delta}^0$ с базой $\rho^0 > \eta^*$. Но с другой стороны, предшествующий блок $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau_3^0}]$ ниже $\alpha^{0\Downarrow}$ имеет тот же тип η^* и согласно (11.2) его левый конец $\gamma_{\tau_1^0}$ может служить допустимым диссеминатором для S^0 на α^0 с той же базой ρ^0 , и поэтому $\tilde{\delta}^0 \leq \gamma_{\tau_1^0}$ благодаря минимальности $\tilde{\delta}^0$, в противоречии с предположением (11.1).

2. Итак, предложение (1a.) выполняется для $(\alpha_1^0, \alpha^0, \tau^0)$ и осталось предположить, что (1b.) нарушается для этой тройки, и мы возвращаемся к ситуации ниже α_1^0 ; это означает: имеется некоторая матрица S^{01} на носителе $\alpha^{01} \neq \alpha^0$ нулевой характеристики, допустимая для $\gamma^0 = \gamma_{\tau^0}$ вместе со своим минимальным диссеминатором $\tilde{\delta}^{01}$ и производящим диссеминатором $\check{\delta}^{01}$ с базой ρ^{01} , но всё-таки S^0 на α^0 подавлена для $\gamma^0 = \gamma_{\tau^0}$ (ниже α_1^0); мы рассмотрим *минимальный* носитель α^{01} такой S^{01} .

Так как матрица S^0 на α^0 допустима для γ^0 , то это подавление означает, что выполняется условие подавления (11.5) ниже α_1^0 , то есть для $\alpha^{0\downarrow}$, $\gamma_{\tau_3^0}$, заменённых на α_1^0 , γ^0 соответственно везде в (11.5).

Отсюда следует, что

$$\alpha^0 < \alpha^{01},$$

потому что если $\alpha^0 > \alpha^{01}$, то вторая индуктивная гипотеза утверждает, что S^{01} на α^{01} неподавлена для γ^0 ниже α_1^0 , и в то же время она подавлена тем же условием подавления. Кроме того, S^0 на α^0 – это единственная матрица, допустимая для γ^0 на носителе $\alpha^0 \in]\gamma^0, \alpha^{01}[$ согласно минимальности α^{01} .

Теперь это условие (11.5), с α_1^0 , γ^0 вместо $\alpha^{0\downarrow}$, $\gamma_{\tau_3^0}$ соответственно, утверждает существование кардиналов (мы сохраняем предыдущие обозначения, чтобы подчеркнуть аналогию с рассуждениями в части 1.):

$$\gamma^m < \gamma^* \leq \gamma_{\tau_1^0} < \gamma^0 \text{ и предельного типа } \eta^*,$$

выполняющих все составляющие его условия $A_{5.1}^{sc} - A_{5.5}^{sc}$; в частности, интервал $[\gamma^m, \gamma^*[$ покрыт максимальными блоками типов, существенно неубывающих до предельного ординала η^* ; $[\gamma^*, \gamma_{\tau_1^0}[$ покрыт максимальными блоками в точности типа η^* ; $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma^0[$ тоже блок того же типа η^* – и так далее.

Эти условия определяют γ^m , γ^* , $\gamma_{\tau_1^0}$, η^* единственным образом через γ^0 ниже α_1^0 и задают особый тип подавляющий этого покрытия; чтобы обсуждать его удобны следующие вспомогательные Σ_n -формулы, использующие только понятие допустимости (напомним определение 8.2 5):

$$\alpha \mathbf{K}^1(\gamma) : \exists \alpha', S' \alpha \mathbf{K}(\gamma, \alpha', S');$$

$$\alpha\mathbf{K}^2(\gamma) : \quad \exists\alpha', S' \exists\alpha'', S'' (\alpha' \neq \alpha'' \wedge \\ \wedge \alpha\mathbf{K}(\gamma, \alpha', S') \wedge \alpha\mathbf{K}(\gamma, \alpha'', S'')).$$

Первое из них означает, что существует по крайней мере *один* матричный носитель α' , допустимый для γ ; второе – что существует *более одного* такого носителя $\alpha' \neq \alpha''$; таким образом $\neg\alpha\mathbf{K}^1(\gamma)$ означает, что таких носителей не существует вовсе.

Так как тип η^* – предельный, то каждый максимальный блок $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ из покрытия интервала $[\gamma^*, \gamma_{\tau_1^0}[$ обладает следующими двумя свойствами:

- (i) если γ_τ – внутренний кардинал в $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$, $\tau_1 < \tau < \tau_2$, то выполняется $\alpha\mathbf{K}^2(\gamma_\tau)$; это следует из второй индуктивной гипотезы и леммы 3.2 [29] об ограничении;
- (ii) если γ_τ – это левый или правый конец этого блока, то $\alpha\mathbf{K}^1(\gamma_\tau)$ нарушается.

В этом можно убедиться следующим образом. Предположим, что γ_τ это правый конец, $\gamma_\tau = \gamma_{\tau_2}$, тогда существование некоторой S' и α' , допустимой для γ_{τ_2} , влечёт объединение этого блока и следующего за ним блока $[\gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}[$ в единый интервал допустимости $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_3}[$ типа $2\eta^*$. И снова по второй индуктивной гипотезе и лемме 3.2 [27] существует несколько матричных носителей α' , допустимых для γ_{τ_2} , которые становятся неподдавленными для γ_{τ_2} и поэтому функция αS_f становится определённой на всём интервале $[\tau_1, \tau_3[$, хотя $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ это *максимальный* блок (всё это ниже α_1^0). Левый конец $\gamma_\tau = \gamma_{\tau_1}$ нужно рассмотреть аналогичным образом.

Следовательно, для каждого $\gamma_\tau \in [\gamma^*, \gamma^0[$ выполняется Δ_{n+1} -формула:

$$\alpha\mathbf{K}^2(\gamma_\tau) \vee \neg\alpha\mathbf{K}^1(\gamma_\tau); \quad (11.8)$$

нетрудно видеть, что та же ситуация выполняется ниже $\alpha^{01\Downarrow}$ по тем же причинам.

Далее производящий диссеминатор δ^{01} матрицы S^{01} на α^{01} осуществляет метод ограничения-и-продолжения.

Во-первых,

$$\tilde{\delta}^{01} \leq \gamma_{\tau_1^0};$$

в противном случае

$$\gamma_{\tau_1^0} < \delta^{01} = \tilde{\delta}^{01} < \gamma^0$$

и δ^{01} продолжает до $\alpha^{01\downarrow}$ Σ_{n+1} -утверждение

$$\forall \gamma_\tau > \gamma_{\tau_1^0} \quad \alpha \mathbf{K}^2(\gamma_\tau).$$

Этот факт вместе со второй индуктивной гипотезой влечёт определённую функцию $\alpha S_f^{<\alpha^{01\downarrow}}$ на некотором непустом множестве $T^{\alpha^{01\downarrow}}$ со свойствами (i)–(iii), указанными в теореме 2, вопреки минимальности α_1^* .

Далее, из $\tilde{\delta}^{01} \leq \gamma_{\tau_1^0}$ следует

$$\gamma^* < \delta^{01} \leq \tilde{\delta}^{01} \leq \gamma_{\tau_1^0}. \quad (11.9)$$

Действительно, блок $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma^0[$ очевидно обеспечивает справедливость следующего Σ_{n+1} -утверждения $\varphi(\tau_1^0, \tau^0, \eta^*)$ ниже α^{01} :

$$\begin{aligned} & \exists \gamma (\gamma_{\tau_1^0} < \gamma_{\tau^0} \leq \gamma \wedge SIN_n(\gamma) \wedge A_{1.2}^{<\gamma}(\tau_1^0, \tau^0, \eta^*) \wedge \\ & \wedge \forall \tau \in]\tau_1, \tau^0[\quad \alpha \mathbf{K}^{2<\gamma}(\gamma_\tau)); \end{aligned}$$

напомним, здесь $A_{1.2}(\tau_1, \tau^0, \eta^*)$ означает, что интервал $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma_{\tau^0}[$ имеет тип η^* .

Диссеминатор $\tilde{\delta}^{01}$ попадает в интервал $[\gamma_{\tau_1^0}, \gamma^0[$ и поэтому $\tilde{\delta}^{01} = \gamma_{\tau_1^0}$, иначе $\tilde{\delta}^{01} < \gamma_{\tau_1^0}$ и по лемме 3.2 [29] появляется много носителей матрицы S^{01} , допустимых для этого $\gamma_{\tau_1^0}$; затем по второй индуктивной гипотезе все они подавлены для $\gamma_{\tau_1^0}$; поэтому матричная функция αS_f становится определённой

для τ_1^0 в противоречии с минимальностью левого конца $\gamma_{\tau_1^0}$ по определению понятия блока.

Так как $\check{\delta}^{01} = \gamma_{\tau_1^0}$, то замыкающее условие \mathbf{K}^0 для S^{01} на α^{01} влечёт $\eta^* < \rho^{01}$ для базы ρ^{01} диссеминатора $\check{\delta}^{01}$.

Но тогда производящий диссеминатор $\check{\delta}^{01}$ с этой базой ограничивает Σ_{n+1} -утверждение

$$\exists \tau'_1, \tau' \varphi(\tau'_1, \tau', \eta^*),$$

потому что оно содержит только индивидуальные константы, ограниченные этой базой ρ^{01} .

Поэтому ниже $\check{\delta}^{01}$ появляются блоки типов $\geq \eta^*$ (снова благодаря второй индуктивной гипотезе).

Теперь если $\check{\delta}^{01} \leq \gamma^*$, то нарушается условие $A_{5,2}^{sc}$ существования неубывания типов покрытия интервала $[\gamma^m, \gamma^*]$ до η^* (см. определение 8.1 2.2).

Таким образом, (11.9) установлено. Благодаря (11.8) ниже $\check{\delta}^{01}$ выполняется P_{n+1} -утверждение

$$\forall \tau (\gamma^* < \gamma_\tau \rightarrow (\alpha \mathbf{K}^2(\gamma_\tau) \vee \neg \alpha \mathbf{K}^1(\gamma_\tau)))$$

и диссеминатор $\check{\delta}^{01}$ продолжает его до $\alpha^{01\Downarrow}$ по лемме 6.6 [29] (для $m = n + 1$, $\delta = \check{\delta}^{01}$, $\alpha_0 = \gamma^*$, $\alpha_1 = \alpha^{01\Downarrow}$). Но это вызывает противоречие: (11.8) выполняется для $\gamma_\tau = \gamma^0$, хотя существует в точности одна матрица S^0 на α^0 ниже $\alpha^{01\Downarrow}$, допустимая для γ^0 .

Итак, свойства (1a.) и (1b.) установлены. Теперь можно обратиться к леммам 8.5 8), 8.8, 8.10 (для $\alpha_1 \leq \alpha_1^*$):

(2) Сначала можно остановиться на лемме 8.8 1) и на утверждении (8.5). Для этого сравним два интервала

$$]\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[, \quad]\gamma_{\tau'_1}, \gamma_{\tau_2}[.$$

Благодаря (8.3), (8.4) $\check{\delta}^3$ содержится в каждом из них, что вызывает

$$\gamma_{\tau'_1} \leq \gamma_{\tau_1},$$

иначе $\gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau'_1}$ и тогда условие (i) и (8.3) влекут существование некоторой матрицы S^1 на её носителе α^1 с диссеминатором $\tilde{\delta}^1$ и базой ρ^1 , допустимой для $\gamma_{\tau'_1}$. По лемме 3.2 [29] матрица S^1 получает свои носители, допустимые для каждого $\gamma_\tau \in]\tilde{\delta}^1, \gamma_{\tau'_1}]$ с теми же $\tilde{\delta}^1, \rho^1$. Таким образом возникает некоторый интервал допустимости $[\gamma_{\tau'_1}, \gamma_{\tau_3}[$ с $\gamma_{\tau'_1} < \gamma_{\tau'_1}$ и по уже доказанному (1a.) минимальный допустимый $\tilde{\delta}^3$ совпадает с $\gamma_{\tau'_1}$, $\tilde{\delta}^3 = \gamma_{\tau'_1}$, вопреки (8.4). Поэтому выполняется $\gamma_{\tau'_1} \leq \gamma_{\tau_1}$ и вместе с (8.3), (8.4) это влечёт (8.5), что обеспечивает оставшуюся часть доказательства леммы 8.8 1).

Обращаясь к лемме 8.8 2) рассмотрим α -матрицу S характеристики a на носителе α , допустимые для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ вместе с диссеминатором $\tilde{\delta}$ и базой ρ ниже α_1 ; можно установить

$$\{\tau' : \tilde{\delta} < \gamma_{\tau'}^{<\alpha_1} < \gamma_\tau^{<\alpha_1}\} \subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1})$$

рассуждениями, уже использованными выше:

для каждого $\gamma_{\tau'}^{<\alpha_1} \in]\tilde{\delta}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}[$ существует много допустимых носителей матрицы S по лемме 3.2 [29], поэтому все они неподдавлены благодаря (1b.) и поэтому $\tau' \in \text{dom}(\alpha S_f^{<\alpha_1})$.

Такие же рассуждения устанавливают, что в лемме 8.10 функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на всём интервале $]\alpha\tau_1^*, \alpha\tau^{*1}[$ для каждого $\alpha_1 > \alpha\delta^{*1}$, $\alpha_1 \in SIN_n$, и $\alpha\delta^* = \gamma_{\alpha\tau_1^*}$ — это диссеминатор матрицы $\alpha S_{\alpha\tau^{*1}}^{<\alpha_1}$ на её носителе $\alpha_{\alpha\tau^{*1}}^{<\alpha_1}$ с базой $\alpha\rho^{*1} = \rho_{\alpha\tau^{*1}}^{<\alpha_1}$.

Такие же рассуждения следует использовать и в доказательстве леммы 8.5 8). Чтобы закончить это доказательство для неподдавленности достаточно заметить, что если S вместе с δ, ρ имеет носитель α , допустимый и неподдавленный для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ только в $[\gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}, \alpha_1[$, то $\gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}$ ограничивает $SIN_{n-1}^{<\alpha_1}$ -утверждение

$$\exists \alpha' (\gamma < \alpha' \wedge \alpha \mathbf{K}_{n-2}(\delta, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau^{<\alpha_1}, \alpha', \rho, S))$$

(см. доказательство леммы 8.5. 8)) для каждого $\gamma \in]\gamma_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}[$, поэтому S получает много своих носителей в $]\gamma_\tau^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau+1}^{<\alpha_1}[$, допустимых для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$, которые также становятся неподавленными для $\gamma_\tau^{<\alpha_1}$ ниже α_1 благодаря (1b).

Следующая лемма показывает, что интервалы $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}[$ определённости матричной функции $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ с минимальными левыми концами $\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \in SIN_n^{<\alpha_1}$ имеют особое строение: для каждого $SIN_n^{<\alpha_1}$ -кардинала $\gamma_\tau^{<\alpha_1} \in]\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_3}^{<\alpha_1}[$ матрица $\alpha S_\tau^{<\alpha_1}$ имеет нулевую характеристику и диссеминаторы $\tilde{\delta}_\tau \leq \tilde{\delta}_\tau = \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$ ниже α_1 :

Лемма 11.1

Пусть

$$(i) \quad A_1^{<\alpha_1}(\tau_1, \tau_2);$$

(ii) S^2 это α -матрица характеристики a^2 на носителе

$$\alpha^2 \in]\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}, \alpha_1[,$$

допустимая для $\gamma_{\tau_2}^{<\alpha_1}$ ниже α_1 вместе со своим минимальным допустимым диссеминатором $\tilde{\delta}^2$ с базой ρ^2 и производящим собственным диссеминатором $\check{\delta}^{S^2}$;

Тогда

$$\check{\delta}^{S^2} \leq \tilde{\delta}^2 = \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \text{ и } a^3 = 0.$$

Доказательство. Верхние индексы $< \alpha_1, \triangleleft \alpha_1$ будут опускаться как обычно.

Рассмотрим α -матрицу S^2 на её носителе α^2 , допустимую для γ_{τ_2} вместе с её минимальным диссеминатором $\tilde{\delta}^2$ с базой ρ^2 и с производящим собственным диссеминатором $\check{\delta}^2 = \check{\delta}^{S^2}$, и рассмотрим ситуацию ниже кардинала предскачка $\alpha^{2\Downarrow}$.

1. Предположим, что наоборот – эта лемма неверна и $\check{\delta}^2 \not\leq \gamma_{\tau_1}$,

так что

$$\gamma_{\tau_1} < \check{\delta}^2 < \gamma_{\tau_2}.$$

По условию (i) $\gamma_{\tau_2} \in SIN_n$ и, следовательно, $\gamma_{\tau_2} \in SIN_n^{<\alpha^{2\downarrow}}$. Благодаря этому и лемме 8.7 допустимость ниже α_1 равносильна допустимости ниже $\alpha^{2\downarrow}$ для всякого $\gamma_\tau \in]\chi^*, \gamma_{\tau_2}[$. Тогда производящий собственный диссеминатор $\check{\delta}^2$ продолжается до $\alpha^{2\downarrow}$. Π_{n+1} -предложение о существовании допустимых α -матриц $\alpha S_f^{<\alpha^{2\downarrow}}$, как это было несколько раз ранее, например, в форме:

$$\forall \gamma' \left(\gamma_{\tau_1} < \gamma' \wedge SIN_{n-1}(\gamma') \rightarrow \exists \alpha, S \alpha \mathbf{K}(\gamma', \alpha, S) \right).$$

В результате появляется функция $\alpha S_f^{<\alpha^{2\downarrow}}$, определённая на множестве со свойствами (i)–(iii) из теоремы 2:

$$T^{\alpha^{2\downarrow}} = \{ \tau : \gamma_{\tau_1} < \gamma_\tau^{<\alpha^{2\downarrow}} < \alpha^{2\downarrow} \},$$

потому что для каждого $\tau \in T^{\alpha^{2\downarrow}}$ появляются некоторые α -матрицы на многих носителях, допустимые для $\gamma_\tau^{<\alpha^{2\downarrow}}$, которые неподавлены для $\gamma_\tau^{<\alpha^{2\downarrow}}$ благодаря (1b.), (1a.); но это противоречит минимальности α_1^* .

2. Итак, $\check{\delta}^2 \leq \gamma_{\tau_1}$; более того – выполняется $A^0(\tau_1)$. Допустим, это не так и существует некоторая α -матрица S^1 на её носителе α^1 , допустимая для γ_{τ_1} вместе с её минимальным диссеминатором $\tilde{\delta}^1 = \gamma_{\tau_1^1}$ с базой ρ^1 ; поэтому $\tau_1^1 < \tau_1$. Согласно лемме 8.8 2) $]\tau_1^1, \tau_1[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f)$ и поэтому для каждого $\tau \in]\tau_1^1, \tau_2[$ существует некоторая α -матрица на носителе, допустимые для γ_τ . Следовательно, возникает некоторый интервал допустимости $]\tau_1^{1'}, \tau_2[$ с $\tau_1^{1'} \leq \tau_1^1 < \tau_2$. Благодаря (1a.) получается $\tilde{\delta}^2 = \gamma_{\tau_1^{1'}}$ и снова по лемме 8.8 2) получается $]\tau_1^{1'}, \tau_2[\subseteq \text{dom}(\alpha S_f)$ вопреки минимальности τ_1 , требуемой здесь в условии (i).

3. Таким образом, выполняется $A^0(\tau_1)$ и, следовательно, выполняется $A_1^0(\tau_1, \tau_2)$; поэтому лемма 10.5 влечёт $a^2 = 0$. И, наконец, снова из (1a.) следует $\tilde{\delta}^2 = \gamma_{\tau_1}$.

—

Теперь обратимся к следующему удобному понятию, которое уже было несколько раз использовано выше, но в дальнейшем оно будет играть ключевую роль и поэтому на него обращает особое внимание

Определение 11.2

Пусть S это матрица на некотором носителе α вместе со своим диссеминатором $\tilde{\delta} < \gamma_{\tau}^{<\alpha_1}$ с базой ρ .

1) Мы будем говорить, что матрица S опирается на этот диссеминатор $\tilde{\delta}$ на её носителе α ниже α_1 , если $\tilde{\delta}$ попадает в некоторый блок $[\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}, \gamma_{\tau_3}^{<\alpha^\downarrow}]$ типа η , то есть если существуют ординалы $\tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, \eta$ такие, что

$$\gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1} \leq \tilde{\delta} < \gamma_{\tau_3}^{<\alpha^\downarrow} \wedge A_4^{b \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau_1, \tau'_1, \tau_2, \tau_3, \eta).$$

Если вдобавок этот блок — максимальный ниже α^\downarrow и имеет тип $\eta < \underline{\rho}$, то мы будем говорить, что матрица S опирается на $\tilde{\delta}$ очень сильно.

2) Пусть существует покрытие кардинала $v \in]\chi^*, \alpha^\downarrow]$ блоками; это покрытие будет называться η -ограниченным (ниже α^\downarrow) если типы всех его блоков в $]\chi^*, \alpha^\downarrow]$ ограничены некоторым постоянным ординалом $\eta < \chi^{*+}$:

$$\forall \gamma' < v \ \forall \tau'_1, \tau'_2, \eta' (\chi^* < \gamma_{\tau'_1}^{<\alpha^\downarrow} < \gamma_{\tau'_2}^{<\alpha^\downarrow} < v \wedge$$

$$\wedge A_4^{Mb \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau'_1, \tau'_2, \eta') \rightarrow \eta' \leq \eta).$$

—

Часть (I) следующей леммы играет роль “несущей конструкции” в дальнейших рассуждениях; часть (II) будет использована в самом конце доказательства теоремы 2 как решающий аргумент. Здесь нужно вспомнить понятие лестницы и его разнообразных атрибутов, которые были введены выше перед леммой 9.5 посредством формул 1.–8.; такая лестница, определённая ниже кардинала предскачка $\alpha_1 = \alpha^\downarrow$ носителя α матрицы S формулой $A_8^{St \triangleleft \alpha^\downarrow}(St, \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}, a_f^{< \alpha^\downarrow})$, должна быть использована как функция на χ^{*+}

$$St = ((\tau_1^\beta, \tau_*^\beta, \tau_2^\beta))_{\beta < \chi^{*+}}$$

такая, что для всяких β, β_1, β_2 :

$$(i) \quad \beta < \chi^{*+} \rightarrow \tau_1^\beta < \tau_*^\beta \leq \tau_2^\beta \wedge A_{1.1}^{Mst \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau_1^\beta, \tau_*^\beta, \tau_2^\beta, \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}, a_f^{< \alpha^\downarrow}),$$

то есть $[\gamma_{\tau_1^\beta}^{< \alpha^\downarrow}, \gamma_{\tau_2^\beta}^{< \alpha^\downarrow}]$ это максимальная единичная ступень ниже α^\downarrow :

$$A_{1.1}^{St \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau_1^\beta, \tau_*^\beta, \tau_2^\beta, \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}, a_f^{< \alpha^\downarrow}) \wedge A_{1.1}^{M \triangleleft \alpha^\downarrow}(\tau_1^\beta, \tau_2^\beta, \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow});$$

$$(ii) \quad \beta_1 < \beta_2 < \chi^{*+} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \tau_2^{\beta_1} < \tau_1^{\beta_2} \wedge Od \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}(\tau_1^{\beta_1}, \tau_*^{\beta_1}) < Od \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}(\tau_1^{\beta_2}, \tau_*^{\beta_2}),$$

то есть такие ступени располагаются последовательно одна после другой и при этом их высоты строго возрастают;

$$(iii) \quad \sup_\beta Od \alpha S_f^{< \alpha^\downarrow}(\tau_1^\beta, \tau_*^\beta) = \chi^{*+},$$

то есть $h(St) = \chi^{*+}$ и высоты этих ступеней строго возрастают до χ^{*+} ;

$$(iv) \quad \text{для каждой максимальной единичной ступени } [\gamma_{\tau_1}^{< \alpha^\downarrow}, \gamma_{\tau_2}^{< \alpha^\downarrow}]$$

ниже α^\Downarrow соответствующая тройка ординалов (τ_1, τ_*, τ_2) является значением этой функции. ¹⁶⁾

Соответственно, эта лестница St завершается в кардинале $v(St) = \alpha^\Downarrow$, если её ступени располагаются конфинально этому кардиналу α^\Downarrow , то есть если выполняется условие $H(\alpha^\Downarrow)$:

$$\forall \gamma < \alpha^\Downarrow \exists \beta < \chi^{*+} \exists \tau_1^\beta, \tau_*^\beta, \tau_2^\beta, (\gamma < \gamma_{\tau_1^\beta}^{\leq \alpha^\Downarrow} < \gamma_{\tau_2^\beta}^{\leq \alpha^\Downarrow} < \alpha^\Downarrow \wedge \\ \wedge St(\beta) = (\tau_1^\beta, \tau_*^\beta, \tau_2^\beta)).$$

Лемма 11.3

Для каждой матрицы S нулевой характеристики на носителе $\alpha > \chi^*$:

(I) Матрица S на носителе α обладает некоторой лестницей St .

(II) Эта лестница St завершается в кардинале α^\Downarrow , то есть

$$v(St) = \alpha^\Downarrow = \sup \{ \gamma_{\tau_2}^{\leq \alpha^\Downarrow} : \exists \beta, \tau_1, \tau_* \ St(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \}.$$

Доказательство I. Рассмотрим любой носитель $\alpha_0 > \chi^*$ матрицы S^0 нулевой характеристики на носителе α_0 и его кардинал предскачка $\alpha^0 = \alpha_0^\Downarrow$.

По лемме 8.5 5) существуют $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$ такие, что ниже α^0

$$A_2^{0 \triangleleft \alpha^0}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \alpha S_f^{\leq \alpha^0}) \wedge \forall \tau'' \in]\tau'_1, \tau'_2] \ a_{\tau''}^{\leq \alpha^0} = 1 \wedge \alpha S_{\tau'_2}^{\leq \alpha^0} = S^0$$

и, следовательно, $a_{\tau'_2}^{\leq \alpha^0} = 1$. Теперь перейдём к носителю $\alpha_2 = \alpha_{\tau'_2}^{\leq \alpha^0}$ и рассмотрим матрицу S^0 на этом носителе $\alpha_2 = \alpha_{\tau'_2}^{\leq \alpha^0}$ и

его кардинал предскачка $\alpha^2 = \alpha_2^\downarrow$. По лемме 10.3 существуют ординалы τ'_*, τ_2'' такие, что $\tau'_1 < \tau'_* \leq \tau_2''$ и

$$A_{1.1}^{st < \alpha^2}(\tau'_1, \tau'_*, \tau_2'', \alpha S_f^{< \alpha^2}, a_f^{< \alpha^2}) \wedge A_{1.1}^{M < \alpha^2}(\tau'_1, \tau_2'', \alpha S_f^{< \alpha^2}); \quad (11.10)$$

$$Od \alpha S_f^{< \alpha^2}(\tau'_1, \tau'_*) > Od(S^0). \quad (11.11)$$

Занумеруем без пропусков все тройки ординалов $(\tau'_1, \tau'_*, \tau_2'')$, обладающих свойством (11.10) в порядке возрастания их первых компонент, то есть определим функцию

$$St = ((\tau_1^\beta, \tau_*^\beta, \tau_2^\beta))_\beta,$$

обладающую свойством (i) лестницы, представленным выше для $\alpha^\downarrow = \alpha^2$; свойство (ii) получается затем из следствия 9.6 для $\alpha_1 = \alpha^2$.

Отсюда и из (11.11) следует, что ординал $Od \alpha S_f^{< \alpha^2}(\tau_1^\beta, \tau_*^\beta)$ возрастает вместе с β до χ^{*+} ; в противном случае можно определить ниже α^2 верхнюю границу множества таких ординалов

$$\rho \in [Od \alpha S_f^{< \alpha^2}(\tau'_1, \tau'_*); \chi^{*+}[,$$

а тогда по лемме 4.6 [29] о спектральном типе

$$\rho < Od(S^0)$$

вопреки (11.11). Поэтому $dom(St) = \chi^{*+}$; свойство (iv) очевидно из конструкции функции St .

Таким образом, свойства (i)–(iv) установлены для носителя α_2 матрицы S^0 и на α_2 она обладает этой лестницей. Тогда по лемме 5.11 [29] об информативности матрица S^0 точно так же обладает некоторой лестницей St^0 на её носителе α_0 , потому

что это свойство является *внутренним* свойством матрицы S^0 (см. комментарий перед леммой 9.5).

II. Обращаясь к утверждению (II) предположим, что оно ложное и эта лестница St^0 завершается в некотором кардинале $v^0 < \alpha^0 = \alpha_0^\downarrow$:

$$v^0 = \sup \{ \gamma_{\tau_2}^{<\alpha^0} : \exists \beta, \tau_1, \tau_* \quad St^0(\beta) = (\tau_1, \tau_*, \tau_2) \};$$

очевидно, v^0 содержится в $SIN_n^{<\alpha^0}$ и имеет конфинальность χ^{*+} .

Оставшаяся часть доказательства этой леммы основывается на методе, который может быть назван *зашивающим методом*; вот его общее описание (ниже α^0):

Рассматривая некоторый кардинал v можно столкнуться с ситуацией, когда существуют кардиналы $\gamma_\tau < v$, расположенные “близко” к этому v , но такие, что функция αS_f предполагается не определённой для соответствующих τ ; поэтому такие кардиналы $\gamma_\tau < v$ могут быть названы “проколами” во множестве

$$v \cap \{ \gamma_\tau : \tau \in \text{dom}(\alpha S_f) \}.$$

С целью преодолеть эту ситуацию и, тем не менее, установить определённую функции αS_f для таких проколов, нужно осуществить следующие два действия:

Нужно найти некоторую α -матрицу S на носителе $\alpha \geq v$ некоторой характеристики a вместе с производящим диссепинатором $\check{\delta}^\rho < v$ и базой ρ такими, что интервал $] \check{\delta}^\rho, v[$ содержит такие проколы.

Одновременно с этим нужно обнаружить некоторый кардинал

$$\gamma^\delta \in [\check{\delta}^\rho, v[\cap SIN_n$$

который вместе с S , ρ *нарушает* посылку замыкающего условия

$$\mathbf{K}^0(a, \gamma^\delta, \alpha, \rho)$$

или выполняет его заключение и тем самым выполняет его в целом и по этой причине по лемме 6.8 1) [29] γ^δ становится также допустимым диссеминатором матрицы S на α с той же базой. Более того, можно видеть, что этот диссеминатор *допустим и неподавлен для каждого*

$$\gamma_\tau \in \{\gamma_\tau : \gamma^\delta < \gamma_\tau < v\},$$

потому что это условие тривиально выполняется для γ_τ и поэтому всё условие допустимости

$$\alpha \mathbf{K}(a, \gamma^\delta, \gamma_\tau, \alpha, \rho, S)$$

выполняется для многих носителей $\alpha > \gamma_\tau$ матрицы S тоже. Поэтому благодаря (1b.) функция αS_f оказывается определённой на всём множестве

$$\{\tau : \gamma^\delta < \gamma_\tau < v\},$$

и таким образом производится “зашивание” интервала $[\gamma^\delta, v[$ — это означает, что это множество включается в $\text{dom}(\alpha S_f)$ и этот интервал не содержит никаких проколов вопреки предположению.

Противоречие этого типа поможет продвинуть далее доказательство леммы 11.3, и тем самым доказательство теоремы 2 на каждой его решающей стадии.

Итак, рассмотрим в качестве подобного v кардинал $v^1 \in \text{SIN}_n^{<\alpha^0}$, являющийся χ^{*+} -им по порядку в $\text{SIN}_n^{<\alpha^0}$, то есть множество

$$v^1 \cap \text{SIN}_n^{<\alpha^0}$$

имеет порядковый тип χ^{*+} ; этот кардинал $v^1 \leq v^0$ действительно существует благодаря $v^0 < \alpha^0$, $cf(v^0) = \chi^{*+}$.

Так как $v^1 \in \text{SIN}_n^{<\alpha^0}$ и $cf(v^1) = \chi^{*+}$, то существует δ -матрица S^1 характеристики a^1 , редуцированная к χ^* и

порождённая кардиналом v^1 на носителе $\alpha^1 < \alpha^0$ с кардиналом предскачка $\alpha^{1\downarrow} = v^1$ с производящим собственным диссеминатором $\tilde{\delta}^1 = \tilde{\delta}^{S^1} < v^1$ с базой $\rho^1 = \rho^{S^1}$ по лемме 6.13 [29], использованной здесь для $m = n + 1$, $\alpha_0 = v^1$, $\alpha_1 = \alpha^0$ и функции

$$f(\beta) = OT(\beta \cap SIN_n^{<v^1}) ;$$

мы рассмотрим минимальный из таких α^1 для некоторой определённости.

Мы увидим, что это вызывает противоречие: возникает определённое множество

$$T^{v^1} = \{\tau : \gamma < \gamma_\tau^{v^1} < v^1\} \subseteq \text{dom}(\alpha S_f^{<v^1})$$

выполняющее все условия теоремы 2 (для v^1 вместо α_1), в противоречии с минимальностью α_1^* ; это противоречие устанавливает, что на самом деле лестница St^0 завершается в кардинале $v^0 = \alpha^0 = \alpha_0^\downarrow$. Этот результат будет достигнут методом зашивания, применённым к v^1 .

Во-первых, возникает покрытие интервала $[\tilde{\delta}^1, v^1[$ максимальными блоками (ниже v^1). Допустим, что это не так, тогда существует некоторый кардинал

$$\gamma^1 \in SIN_n^{<v^1} \cap]\tilde{\delta}^1, v^1[$$

который не принадлежит ни одному блоку (ниже v^1). Тогда этот γ^1 может служить диссеминатором

$$\tilde{\delta}^1 = \gamma^1$$

с той же базой ρ^1 для той же матрицы S^1 характеристики a^1 на носителе α^1 по лемме 6.8 [29] (для $m = n + 1$), допустимым для каждого $\gamma_\tau \in]\tilde{\delta}^1, v^1[$, так как выполняется замыкающее Δ_1 -условие $\mathbf{K}^0(\alpha^1, \tilde{\delta}^1, \alpha^1, \rho^1)$

$$\begin{aligned}
& (a^1 = 0 \rightarrow \forall \tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta' < \alpha^{1\Downarrow} [\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha^{1\Downarrow}} \leq \tilde{\delta}^1 < \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha^{1\Downarrow}} \wedge \\
& \wedge A_4^{M\triangleleft\alpha^{1\Downarrow}}(\tau'_1, \tau''_1, \tau'_2, \tau'_3, \eta', \alpha S_f^{<\alpha^{1\Downarrow}}, a_f^{<\alpha^{1\Downarrow}}) \rightarrow \eta' < \rho^1 \vee \rho^1 = \chi^{*+}]) \quad (11.12)
\end{aligned}$$

благодаря ложности его посылки $A_4^{M\triangleleft\alpha^{1\Downarrow}}$. Теперь действует зашивающий метод: для каждого $\gamma_\tau \in]\tilde{\delta}^1, v^1[$ и для

$$\gamma_{\tau^n} = \sup\{\gamma \leq \gamma_\tau : \gamma \in SIN_n^{<v^1}\}$$

выполняется Π_{n-2} -условие $\varphi(a^1, \tilde{\delta}^1, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau, \alpha^1, \rho^1, S^1)$:

$$\gamma_\tau < \alpha^1 \wedge SIN_n^{<\alpha^{1\Downarrow}}(\gamma_{\tau^n}) \wedge \alpha \mathbf{K}_{n+1}^\exists(a^1, \tilde{\delta}^1, \gamma_\tau, \alpha^1, \rho^1, S^1)$$

утверждающее, что S^1 на α^1 допустима для γ_τ вместе с теми же $a^1, \tilde{\delta}^1, \rho^1$. Тогда SIN_{n-1} -кардинал $\gamma_{\tau+1}$ ограничивает Σ_{n-1} -утверждение

$$\exists \alpha (\gamma_\tau < \alpha \wedge \varphi(a^1, \tilde{\delta}^1, \gamma_{\tau^n}, \gamma_\tau, \alpha, \rho^1, S^1)) \quad (11.13)$$

и поэтому в $] \gamma_\tau, \gamma_{\tau+1}[$ появляется много допустимых для γ_τ носителей α с тем же свойством (11.13) и это вызывает противоречие ниже v^1 :

все они неподавлены для γ_τ благодаря (1b.) и функция $\alpha S_f^{<v^1}$ становится определенной для γ_τ и, таким образом, становится определённой для всего интервала $[\tilde{\delta}^1, v^1[$ (то есть совершилось зашивание этого интервала); но это и составляет противоречие – появляется некоторое множество T^{v^1} определённости этой функции $\alpha S_f^{<v^1}$ со свойствами (i)-(iii) из теоремы 2 (для $\alpha_1 = v^1$), в противоречии с минимальностью α_1^* .

Итак, интервал $[\tilde{\delta}^1, v^1[$ покрывается максимальными блоками ниже v^1 и выполняется условие

$$A_{5.1}^{sc\triangleleft v^1}(\gamma^m, \alpha S_f^{<v^1}, a_f^{<v^1})$$

утверждающее покрытие интервала $[\gamma^m, v^1[$ максимальными блоками ниже v^1 и минимальность кардинала γ^m с этим свойством (напомним определение 8.1 2.1a., 2.1b.).

Оставшаяся часть доказательства этой леммы 11.3 проводится ниже v^1 и верхние индексы $< v^1$, $\triangleleft v^1$ и обозначения функций $\alpha S_f^{<v^1}$, $a_f^{<v^1}$ будут как обычно опускаться (когда контекст будет очевидно на них указывать).

Мы переходим к заключительному противоречию этого доказательства:

это покрытие не может быть η -ограниченным, и в то же время оно должно быть η -ограниченным ниже v^1 (см. определение 11.2 2) для $\alpha^\Downarrow = v^1$).

Действительно, это покрытие не может быть η -ограниченным, так как в противном случае существует некоторый постоянный тип его максимальных блоков, располагающихся конфинально v^1 . Минимальный тип η^1 из таких типов очевидно определяется ниже $v^1 = \alpha^\Downarrow$ и по лемме 4.6 [29] о спектральном типе это влечёт

$$\eta^1 < Od(S^1) < \rho^1.$$

Но тогда действует метод зашивания. Пусть $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ это максимальный блок в $[\tilde{\delta}^1, v^1[$ типа η^1 с минимальным левым концом γ_{τ_1} , тогда SIN_n -кардинал γ_{τ_1} может служить диссеминатором $\tilde{\delta}^{1'} = \gamma_{\tau_1}$ для S^1 на он α^1 с той же базой ρ^1 . И снова выполняется утверждение (11.12) (где $\tilde{\delta}^1$ следует заменить на $\tilde{\delta}^{1'}$), но теперь потому, что S^1 на α^1 опирается на $\tilde{\delta}^{1'}$ очень сильно: существует единственный максимальный блок $[\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha^{1\Downarrow}}, \gamma_{\tau'_3}^{<\alpha^{1\Downarrow}}[$, совпадающий с $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ типа η^1 , который содержит $\tilde{\delta}^{1'}$ и который выполняет его заключение $\eta^1 < \rho^1$. И снова выполняется (11.13) для каждого $\gamma_\tau \in]\tilde{\delta}^{1'}, v^1[$ и поэтому таким же образом существует множество T^{v^1} , вопреки минимальности α_1^* .

Следовательно, покрытие интервала $[\gamma^m, v^1[$ не должно быть η -ограниченным, а тогда типы его максимальных блоков долж-

ны существенно неубывать до χ^{*+} (ниже v^1), то есть:

$$\forall \eta < \chi^{*+} \exists \gamma' < v^1 \forall \tau'_1, \tau'_2, \eta' (\gamma' < \gamma_{\tau'_2} \leq v^1 \wedge \quad (11.14)$$

$$\wedge A_4^{Mb}(\tau'_1, \tau'_2, \eta', \alpha S_f^{<v^1}, a_f^{<v^1}) \rightarrow \eta < \eta');$$

в противном случае снова существует некоторый постоянный тип его максимальных блоков, располагающихся конфинально v^1 и приводящий к прежнему противоречию.

Но и это приводит к противоречию: бесконечно много значений матричной функции $\alpha S_f^{<v^1}$ становятся подавленными (ниже v^1), хотя они неподдавлены по определению 8.3 этой матричной функции.

Чтобы убедиться в этом, нужно применить следующий метод рассуждения, который может быть назван “отсечение блоков справа” и который состоит в “укорачивании слишком длинных блоков” с правого конца посредством “отсечения” их конечных подинтервалов справа.

Этот метод будет действовать здесь вполне успешно, потому что это покрытие не является η -ограниченным и поэтому действует на такие блоки как подавляющее покрытие, выполняя условие (см. определение 8.1 2.4 для $X_1 = \alpha S_f^{<v^1} | \tau$, $X_2 = a_f^{<v^1} | \tau$):

$$A_{5.4}^{sc}(\gamma_\tau, \eta^*, \alpha S_f^{<v^1} | \tau, a_f^{<v^1} | \tau)$$

для бесконечно многих кардиналов γ_τ , расположенных конфинально v^1 , и для некоторых соответствующих $\gamma^m, \gamma^*, \gamma^1, \eta^*$.

Здесь кардинал γ^m уже определён выше как минимальный из левых концов блоков покрытия кардинала v^1 .

Далее, ординалы γ^*, η^* могут быть определены здесь разными способами, например, согласно (11.14) как предельные значения следующих последовательностей ниже v^1 (обозначения $\alpha S_f^{<v^1}, a_f^{<v^1}$ будут опущены):

$$\gamma_0 = \gamma^m;$$

$$\begin{aligned}
\eta_i &= \sup \{ \eta : \exists \tau_1, \tau_2 (\gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau_2} < \gamma_i \wedge A_4^{Mb}(\tau_1, \tau_2, \eta)) \}; \\
\gamma_{i+1} &= \min \{ \gamma : \exists \tau_1, \tau_2, \eta (\gamma_i < \gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau_2} = \gamma \wedge \eta_i < \eta \wedge \\
&\quad \wedge A_4^{Mb}(\tau_1, \tau_2, \eta) \wedge \forall \tau'_1, \tau'_2, \eta' (\gamma \leq \gamma_{\tau'_1} < \gamma_{\tau'_2} \wedge \\
&\quad \wedge A_4^{Mb}(\tau'_1, \tau'_2, \eta') \rightarrow \eta \leq \eta') \}; \\
\eta^* &= \sup_{i \in \omega_0} \eta_i; \quad \gamma^* = \sup_{i \in \omega_0} \gamma_i.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Так как типы максимальных блоков этого покрытия существенно неубывают до χ^{*+} , то существует максимальный блок в $[\gamma^*, v^1[$

$$[\gamma_{\tau_1^*}, \gamma_{\tau_2^*}[\text{ большего типа } \eta^{*1} > \eta^*$$

и следует рассмотреть такой блок с *минимальным* левым концом $\gamma_{\tau_1^*} > \gamma^*$. Очевидно, этот блок включает в себя свой начальный подинтервал

$$[\gamma_{\tau_1^*}, \gamma^{*1}[\text{ типа в точности } \eta^*,$$

который тоже является блоком (не максимальным) с правым концом $\gamma^{*1} \in SIN_n$, $\gamma^{*1} = \gamma_{\tau_2^{*1}}$.

Следовательно, существует матрица

$$S^{*1} = \alpha S_{\tau_2^{*1}}$$

на её носителе $\alpha^{*1} = \alpha_{\tau_2^{*1}}$ характеристики $a^{*1} = a_{\tau_2^{*1}}$, которая допустима и *неподавлена* для γ^{*1} вместе со своим диссеминатором $\tilde{\delta}^{*1} = \tilde{\delta}_{\tau_2^{*1}}$ с базой $\rho^{*1} = \rho_{\tau_2^{*1}}$ по определению (всё это ниже v^1).

Но в то же время эта матрица S^{*1} и все её атрибуты, наоборот, подавлены для γ^{*1} , так как для них выполняется условие подавления $A_5^{S,0}$ ниже v^1 (напомним определение 8.1 2.6, а также (11.5)), которое для этой ситуации можно сформулировать так:

$$a^{*1} = 0 \wedge SIN_n^{<v^1}(\gamma^{*1}) \wedge \rho^{*1} < \chi^{*+} \wedge \sigma(\chi^*, \alpha^{*1}, S^{*1}) \wedge$$

$$\begin{aligned}
& \wedge \exists \eta^*, \tau < \gamma^{*1} \left(\gamma^{*1} = \gamma_{\tau}^{<v^1} \wedge A_{5.4}^{sc \triangleleft v^1}(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha S_f^{<v^1} | \tau, a_f^{<v^1} | \tau) \wedge \right. \\
& \quad \wedge \forall \tau' \left(\tau < \tau' \wedge SIN_n^{<v^1}(\gamma_{\tau'}^{<v^1}) \rightarrow \right. \\
& \quad \rightarrow \exists \alpha', S' [\gamma_{\tau'}^{<v^1} < \alpha' < \gamma_{\tau'+1}^{<v^1} \wedge SIN_n^{<\alpha'^{\downarrow}}(\gamma_{\tau'}^{<v^1}) \wedge \sigma(\chi^*, \alpha', S') \wedge \\
& \quad \quad \left. \left. \wedge A_{5.5}^{sc \triangleleft v^1}(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha'^{\downarrow}, \alpha S_f^{<\alpha'^{\downarrow}}, a_f^{<\alpha'^{\downarrow}}) \right] \right).
\end{aligned} \tag{11.16}$$

Здесь действительно $a^{*1} = 0$ по лемме 11.1; $SIN_n^{<v^1}(\gamma^{*1})$ выполняется по построению; $\rho^{*1} < \chi^{*+}$ так как v^1 это χ^{*+} -кардинал по порядку в $SIN_n^{<v^1}$; $\sigma(\chi^*, \alpha^{*1}, S^{*1})$ выполняется благодаря допустимости S^{*1} на α^{*1} для γ^{*1} ; $A_{5.4}^{sc \triangleleft v^1}$ выполняется потому, что типы покрытия γ^* существенно неубывают до η^* по (11.15); и максимальные блоки из интервала $[\gamma^*, \gamma_{\tau_1}^*]$ имеют постоянный тип η^* благодаря минимальности $\gamma_{\tau_1}^*$ — и осталось проверить условие $A_{5.5}^{sc}$ из (11.16). Для этого следует применить обычный ограничивающий аргумент:

Каждый максимальный блок $[\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}[$ в $[\gamma^*, v^1[$ имеет тип $\eta \geq \eta^*$ согласно (11.15) и поэтому выполняется следующее Π_{n-2} -утверждение $\psi(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha^1, S^1, \alpha S_f^{<\alpha^{1\downarrow}}, a_f^{<\alpha^{1\downarrow}})$:

$$\sigma(\chi^*, \alpha^1, S^1) \wedge A_{5.5}^{sc}(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha^{1\downarrow}, \alpha S_f^{<\alpha^{1\downarrow}}, a_f^{<\alpha^{1\downarrow}}),$$

где $A_{5.5}^{sc}$ — это Δ_1 -формула (см. определение 8.1 2.5):

$$\begin{aligned}
& \forall \gamma' \left(\gamma^{*1} \leq \gamma' < \alpha^{1\downarrow} \rightarrow \exists \tau'_1, \tau'_2, \eta' (\gamma_{\tau'_1}^{<\alpha^{1\downarrow}} \leq \gamma' < \gamma_{\tau'_2}^{<\alpha^{1\downarrow}} \wedge \right. \\
& \quad \left. \wedge A_4^{M \triangleleft \alpha^{1\downarrow}}(\tau'_1, \tau'_2, \eta', \alpha S_f^{<\alpha^{1\downarrow}}, a_f^{<\alpha^{1\downarrow}}) \wedge \eta' \geq \eta^*) \right).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим любой кардинал $\gamma_{\tau'} > \gamma^{*1}$, $\gamma_{\tau'} \in SIN_n^{<v^1}$; согласно лемме 3.2 [29] об ограничении SIN_{n-1} -кардинал $\gamma_{\tau'+1}$

ограничивает Σ_{n-1} -утверждение $\exists \alpha' \psi_1(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha', \gamma_{\tau'})$, где ψ_1 это формула:

$$\begin{aligned} \exists S' [\gamma_{\tau'} < \alpha' \wedge SIN_n^{<\alpha'\Downarrow}(\gamma_{\tau'}) \wedge \\ \wedge \psi(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha', S', \alpha S_f^{<\alpha'\Downarrow}, a_f^{<\alpha'\Downarrow})], \end{aligned}$$

и поэтому некоторые носители α' матрицы S' с этим свойством появляются в $]\gamma_{\tau'}, \gamma_{\tau'+1}[$. Следовательно, ниже v^1 выполняется утверждение:

$$\forall \tau' (\tau_2^{*1} < \tau' \wedge SIN_n^{<v^1}(\gamma_{\tau'}) \rightarrow \exists \alpha' < \gamma_{\tau'+1} \psi_1^{<v^1}(\gamma^{*1}, \eta^*, \alpha', \gamma_{\tau'})).$$

В результате условие подавления (11.16) выполняется в целом для матрицы S^{*1} на её носителе α^{*1} и она не может быть значением матричной функции $\alpha S_f^{<v^1}$ ниже v^1 вопреки предположению.

⊥

Теперь заключительная часть доказательства теоремы 2 приводит к своему завершению. Снова все рассуждения будут релятивизированы к α_1^* и поэтому верхние индексы $< \alpha_1^*$, $\triangleleft \alpha_1^*$ и обозначения функций $\alpha S_f^{<\alpha_1^*}$, $a_f^{<\alpha_1^*}$ в записях формул будут опускаться.

По предположению эта теорема нарушается для минимального кардинала α_1^* , поэтому существуют $\tau_2^*, \tau_3^* < \alpha_1^*$ такие, что выполняется

$$A_2(\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*),$$

где, напомним, τ_1^* это минимальный ординал во множестве $T^{\alpha_1^*}$ и где τ_2^* это минимальный ординал на котором наруша-

ется монотонность функции αS_f на $T^{\alpha_1^*}$; рассмотрим произвольно большой ординал τ_3^* из множества

$$Z^* = \{\tau : \gamma_2^* < \gamma_\tau < \alpha_1^* \wedge \gamma_\tau \in SIN_n\},$$

и рассмотрим соответствующие кардиналы

$$\gamma_i^* = \gamma_{\tau_i^*}, \quad i = \overline{1, 3},$$

а также матрицу $S^{*2} = \alpha S_{\tau_2^*}$ на носителе $\alpha_{\tau_2^*}$ характеристики $a^{*2} = a_{\tau_2^*}$ с кардиналом предскачка $\alpha^{*2} = \alpha_{\tau_2^*}^\downarrow$ и её производящий собственный диссеминатор $\delta^{*2} = \delta_{\tau_2^*}^{S^*}$. Но главную роль будет играть далее матрица

$$S^{*3} = \alpha S_{\tau_3^*} \quad \text{на носителе} \quad \alpha_{\tau_3^*}$$

для этого $\tau_3^* \in Z^*$ с кардиналом предскачка $\alpha^{*3} = \alpha_{\tau_3^*}^\downarrow$ и с производящим и плавающим диссеминаторами

$$\delta^{*3} = \delta_{\tau_3^*}^{S^*}, \quad \widetilde{\delta}^{*3} = \widetilde{\delta}_{\tau_3^*}^{S^*} \quad \text{с базой} \quad \rho^{*3} = \rho_{\tau_3^*}^{S^*}.$$

Из леммы 11.1 (для $\tau_1^*, \tau, \alpha S_\tau, \alpha_\tau, \alpha_1^*$ как $\tau_1, \tau_2, S^2, \alpha^2, \alpha_1$) следует:

$$\forall \tau \in Z^* \quad (a_\tau = 0 \wedge \widetilde{\delta}_\tau = \gamma_1^*). \quad (11.17)$$

Теперь возникают следующие случаи:

Случай 1. $a^{*2} = 1$. Тогда по лемме 10.3 существует $\tau_1^{*'}$ такой, что

$$A_3(\tau_1^*, \tau_1^{*'}, \tau_2^*, \tau_3^*) \quad (11.18)$$

(см. определение 81.1.5) где, напомним, матрица $\alpha S_{\tau_1^{*'}}$ имеет единичную характеристику на её носителе $\alpha_{\tau_1^{*'}}$.

Начиная с этого места следует использовать только такой ординал τ_3^* , что соответствующий интервал

$$[\gamma_1^*, \gamma_{\tau_3^*}[$$

имеет тип

$$\eta^{*3} > Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}});$$

существование таких ординалов τ_3^* следует из условий (i), (iii) этой теоремы 2.

Рассмотрим следующие подслучаи:

Подслучай 1a. Предположим, что

$$\alpha S_{\tau_1^{*'}} \triangleleft \rho^{*3}.$$

Но это исключается рассуждением ограничения-и-продолжения, обеспечивающим здесь следующий аргумент, который может быть назван “срезание лестницы сверху” и который состоит в срезании высот ступеней лестницы:

Матрица $\alpha S_{\tau_1^{*'}}$ единичной характеристики имеет допустимый носитель

$$\alpha_{\tau_1^{*'}} \in]\tilde{\delta}_3^*, \gamma_3^*[,$$

так как $\tilde{\delta}_3^* = \gamma_1^*$. По лемме 3.2 [29] об ограничении эта матрица получает свои допустимые носители, расположенные конфинально диссеминатору $\check{\delta}^{*3} \leq \tilde{\delta}^{*3}$, и поэтому выполняется следующее Π_{n+1} -предложение ниже $\check{\delta}^{*3}$:

$$\forall \gamma \exists \gamma^1 > \gamma \exists \delta, \alpha, \rho (SIN_{n-1}(\gamma^1) \wedge \alpha \mathbf{K}(1, \delta, \gamma^1, \alpha, \rho, \alpha S_{\tau_1^{*'}}))$$

и благодаря $S_{\tau_1^{*'}} \triangleleft \rho^{*3}$ и лемме 6.6 [29] (для $m = n + 1$) этот диссеминатор продолжает это утверждение до кардинала предскачка α^{*3} и поэтому $\alpha S_{\tau_1^{*'}}$ получает свои допустимые носители ниже α^{*3} , расположенные конфинально α^{*3} .

По лемме 11.3 существует лестница St ниже α^{*3} , завершающаяся в α^{*3} , но по лемме 9.5 2b. (о срезании лестницы сверху, где α_1, S^0 нужно заменить на $\alpha^{*3}, \alpha S_{\tau_1^{*'}}$) эта лестница St невозможна, так как высоты всех ступеней $St(\beta)$ этой лестницы ограничиваются ординалом

$$Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}}) < \chi^{*+}$$

(срезаются этим ординалом), хотя они возрастают до χ^{*+} по определению.

Подслучай 1b. Таким образом

$$\rho^{*3} \leq Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}}).$$

Но напомним, что здесь используется тип

$$\eta^{*3} > Od(\alpha S_{\tau_1^{*'}})$$

блока $[\gamma_1^*, \gamma_3^*]$.

Согласно (11.18) существуют ординалы τ_3', η_3' такие, что для $\alpha^{*3} = \alpha_{\tau_3^*}^{\downarrow}$ выполняется

$$A_4^{Mb < \alpha^{*3}}(\tau_1^*, \tau_1^{*'}, \tau_2^*, \tau_3', \eta_3'). \quad (11.19)$$

Эти ординалы $\tau_1^*, \tau_1^{*'}, \tau_2^*, \tau_3', \eta_3'$ однозначно определяются через $\chi^*, \gamma_1^* = \tilde{\delta}^{*3}$ ниже α^{*3} и нетрудно видеть, что

$$\tau_3^* \leq \tau_3', \quad \eta^{*3} \leq \eta_3'.$$

Из допустимости S^{*3} на $\alpha_{\tau_3^*}$ и леммы 8.5 6) следует замыкающее условие $\mathbf{K}^0(a^{*3}, \tilde{\delta}^{*3}, \alpha_{\tau_3^*}, \rho^{*3})$:

$$\begin{aligned} a^{*3} = 0 \longrightarrow \forall \tau_1', \tau_1'', \tau_2', \tau_3', \eta' \left[\gamma_{\tau_1'}^{\leq \alpha^{*3}} \leq \tilde{\delta}^{*3} < \gamma_{\tau_3'}^{\leq \alpha^{*3}} \wedge \right. \\ \left. \wedge A_4^{Mb < \alpha^{*3}}(\tau_1', \tau_1'', \tau_2', \tau_3', \eta', \alpha S_f^{\leq \alpha^{*3}}, a_f^{\leq \alpha^{*3}}) \rightarrow \eta' < \rho^{*3} \vee \rho^{*3} = \chi^{*+} \right], \end{aligned}$$

которое и заканчивает это рассуждение следующим образом: Так как блок $[\gamma_{\tau_1'}^{\leq \alpha^{*3}}, \gamma_{\tau_3'}^{\leq \alpha^{*3}}]$ однозначно определяется через $\tilde{\delta}^{*3} = \gamma_1^*$ ниже α^{*3} , то

$$\tilde{\delta}^{*3} = \gamma_1^* = \gamma_{\tau_1'}^{\leq \alpha^{*3}}, \quad \eta^{*3} \leq \eta_3' = \eta'.$$

Отсюда, из (11.17) и (11.19) следует, что S^{*3} на $\alpha_{\tau_3^*}$ опирается на $\tilde{\delta}^{*3}$ очень сильно, то есть

$$\alpha S_{\tau_1^{*'}} \triangleleft \rho^{*3},$$

в противоречии с условием этого подслучая.

Случай 2. $a^{*2} = 0$. В этом случае ниже кардинала предскачка $\alpha^{*2} = \alpha_{\tau_2^*}^{\downarrow}$ выполняется

$$\forall \gamma < \gamma_2^* \exists \tau (\gamma < \gamma_\tau^{<\alpha^{*2}} \wedge a_\tau^{<\alpha^{*2}} = 1).$$

Это утверждение очевидно следует из леммы 11.3, потому что существует некоторая лестница St единичных ступеней, завершающаяся в α^{*2} . Отсюда и из леммы 10.4 следует существование ординала $\tau_1^{*'}$, для которого (11.18) снова выполняется (мы сохраняем здесь обозначения из случая 1. для некоторого удобства). Остаётся буквально повторить рассуждение, следующее за (11.18), и получить прежнее противоречие. Доказательство теоремы 2 закончено.

⊥

Подведём итоги.

Все рассуждения проводились в теории

$$ZF + \exists k \text{ (} k \text{ слабо недостижимый кардинал)};$$

в ней рассматривалась счётная стандартная модель

$$\mathfrak{M} = (L_{\chi^0}, \in, =)$$

теории

$$ZF + V = L + \exists k \text{ (} k \text{ слабо недостижимый кардинал)},$$

где всякий слабо недостижимый кардинал является сильно недостижимым.

В этой модели рассматривались матричные функции; такая функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ определена на всяком непустом множестве T^{α_1} , которое существует для всякого достаточно большого кардинала $\alpha_1 < k$, $\alpha_1 \in SIN_n$ согласно лемме 8.9.

Это влечёт заключительное противоречие: рассмотрим любой SIN_n -кардинал $\alpha_1 > \alpha\delta^*$ предельный для $SIN_n \cap \alpha_1$ и кофинальности $cf(\alpha_1) \geq \chi^{*+}$, доставляющий такое непустое множество T^{α_1} со свойствами (i)–(iii) из теоремы 2, тогда функция $\alpha S_f^{<\alpha_1}$ немонотонна на этом T^{α_1} по теореме 1 и в то же время монотонна на этом множестве по теореме 2.

Это противоречие завершает доказательство основной теоремы.

—

12 Некоторые следствия

Вернёмся к началу во Введение в [29], где приводились различные хорошо известные связи между Гипотезами больших кардиналов, Аксиомой детерминированности, регулярными свойствами континуальных множеств и так далее (см. Дрейк [8], Канамори [9]). Здесь мы укажем некоторые простые следствия из таких результатов и основной теоремы.

I. Гипотезы больших кардиналов

Рассмотрим здесь Гипотезы больших кардиналов, утверждающие существование больших кардиналов какого-либо вида. Иерархия больших кардиналов располагает их по “степени недостижимости” и базируется на (слабо) недостижимых кардиналах. Существование некоторых из них (кардиналов Мало, слабо компактных и т.д.) прямо исключается основной теоремой. Следовательно, не существует кардиналов, обладающих более сильными партиционными свойствами, например, неопысываемых кардиналов, кардиналов Рамсея, Эрдёша и других; измеримые кардиналы также не существуют, так как они являются кардиналами Рамсея. В некоторых случаях в доказательстве несовместности Гипотез больших кардиналов может быть использована AC , но можно обойтись и без этого, извлекая из таких гипотез существование модели $ZFC + \exists$ недостижимый кардинал (см., например, Сильвер [31]).

Мы опускаем переформулировку таких результатов в терминах фильтров, деревьев, инфинитарных языков и т.д.

II. Сингулярные кардиналы. Шарпы.

Так как недостижимые кардиналы не существуют, то всякий несчётный предельный кардинал сингулярен. Известно, что в ZFC каждый наследный кардинал регулярен. Следовательно, каждый несчётный кардинал сингулярен в точности тогда,

когда он пределен.

Хорошо известен замечательный результат Йенсена: отрицание гипотезы недостижимых кардиналов влечёт Гипотезу сингулярных кардиналов (см. также Стерн [32]). А несуществование внутренней модели с измеримым кардиналом влечёт Покрывающую лемму для стержневой модели K : для каждого несчётного $X \subseteq On$ существует $Y \in K$ такое, что $X \subseteq Y$ и $|X| = |Y|$.

Отсюда следует Гипотеза сингулярных кардиналов (Додд, Йенсен [33, 34]). Таким образом, несуществование недостижимых кардиналов устанавливает Покрывающую лемму и Гипотезу сингулярных кардиналов.

Эта ситуация проливает новый свет на проблему шарпов.

Хорошо известно, что существование 0^\sharp влечёт существование недостижимого в L кардинала (Гитик, Магидор, Вудин [35]). Следовательно, 0^\sharp не существует; этот результат влечёт Покрывающую лемму для L по выдающейся теореме Йенсена (см. Девлин, Йенсен [36]).

Отсюда и из знаменитого результата Кюнена, устанавливающего эквивалентность существования элементарного вложения $L \prec L$ и существования 0^\sharp , следует, что не существует элементарных вложений $L \prec L$ и, далее, не существует элементарных вложений $L_\alpha \prec L_\beta$ с критической точкой меньшей $|\alpha|$.

III. Аксиома детерминированности

Хорошо известно, что AD влечёт некоторые Гипотезы больших кардиналов. Например, Соловай установил, что AD влечёт измеримость кардинала ω_1 ; кардиналы ω_2 , $\omega_{\omega+1}$, $\omega_{\omega+2}$ тоже измеримы (см. также Клейнберг [37], Mignone [38]). Кроме того, AD устанавливает, что кардиналы ω_1 , ω_2 являются δ -суперкомпактными для некоторого недостижимого кардинала δ (Беккер [39]). Мыциельский [40] получил выдающийся

результат: совместность

$$ZF + AD$$

влечёт совместность

$$ZFC + \exists \text{ недостижимый кардинал.}$$

Следовательно, аксиома AD несовместна, но можно более точно выделить её несовместную часть:

Именно, аксиома $AD(\Sigma_2^1)$ равнонепротиворечива с Гипотезой измеримых кардиналов (Louveau [41]). Поэтому существуют недетерминированные Σ_2^1 -игры.

Также, используя $AC_\omega(\omega_\omega)$, можно доказать $\neg Det(\Pi_1^1)$ (см. Канамори [9]). Поэтому в

$$ZF + AC_\omega(\omega_\omega)$$

существуют недетерминированные Π_1^1 -игры. Этот результат вряд ли можно улучшить, потому что все Δ_1^1 -игры детерминированы (Мартин [42]).

IV. Континуальные множества

Хорошо известен ряд выдающихся результатов, устанавливающих связи между регулярными свойствами континуальных множеств и большими кардиналами (по относительной непротиворечивости). Например, Шелах [43] установил необходимость недостижимых кардиналов для утверждения, что все множества действительных чисел измеримы по Лебегу; измеримость Σ_3^1 -множеств влечёт недостижимость ω_1 в L (см. также Raisonier [44]). Отсюда следует существование неизмеримого Σ_3^1 -множества действительных чисел. Аналогично, непротиворечивость

$$ZF + DC + \text{каждое несчётное множество}$$

действительных чисел имеет совершенное ядро

не может быть доказана без Гипотезы измеримых кардиналов (см. Мыциельский [40]). Кроме того, следующие гипотезы равнонепротиворечивы над ZF :

- 1) $AC + \exists$ *недостижимый кардинал*;
- 2) $DC +$ *каждое несчётное множество действительных чисел имеет совершенное ядро*;
- 3) ω_1 *регулярен* $+ \forall a \in {}^\omega\omega \left(\omega_1^{L[a]} < \omega_1 \right)$

(см. Соловай [26], Шпекер [45], Леви [21]). Поэтому DC влечёт существование множества действительных чисел без совершенного ядра и регулярность ω_1 влечёт

$$\omega_1^{L[a]} \not\leq \omega_1$$

для некоторого $a \in {}^\omega\omega$. Также хорошо известно, что Гипотеза слабо компактного кардинала равнонепротиворечива (над ZFC) с утверждением о регулярных свойствах всех континуальных несчётных множеств в $ZF + MA$ (Харингтон, Шелах [46]). Следовательно, основная теорема влечёт существование несчётных множеств $\subseteq \omega_\omega$ без регулярных свойств.

Эти результаты можно уточнить; например, Соловай [30] установил, что для всякого $a \in {}^\omega\omega$ $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ эквивалентно свойству совершенного ядра всякого $\Pi_1^1(a)$ -множества действительных чисел. Отсюда следует, что регулярность ω_1 влечёт существование $\Pi_1^1(a)$ -множества действительных чисел без совершенного ядра для некоторого $a \in {}^\omega\omega$.

V. Аксиома Мартина

Следствия из результатов Харингтона, Шелаха [46] и основ-

ной теоремы, упомянутые выше, можно сформулировать более точно, например, следующим образом:

MA влечёт существование Δ_3^1 -множеств, лишённых свойства Бэра, и неизмеримых Σ_3^1 -множеств $\subseteq {}^\omega\omega$.

Кановой [47] установил в

$$ZFC + MA + |R| > \omega_1 + \forall x \subseteq \omega_1 \quad \omega_1^{L[x]} = \omega_0$$

совместность

$$ZFC + \exists \text{ недостижимый кардинал.}$$

Следовательно, MA несовместна с

$$ZFC + |R| > \omega_1 + \forall x \subseteq \omega_1 \quad \omega_1^{L[x]} = \omega_0.$$

Ряд других следствий основной теоремы слишком велик, чтобы здесь их перечислить, поэтому автор намеревается представить более детальный анализ таких следствий в дальнейших публикациях.

Примечания

9) стр. 33. Это последнее уточнение не является необходимым и доказательство основной теоремы можно провести без него (ценой некоторых незначительных усложнений), однако мы примем его, чтобы несколько сократить предстоящие рассуждения.

10) стр. 44. Это определение использовалось ранее (Киселев [15–17]) в виде единого текста, а теперь оно разделено на части чтобы прояснить его структуру.

11) стр. 48. Это замыкающее условие \mathbf{K}^0 действует здесь как условие \mathbf{K}^0 , использованное ранее (Киселев [15–17]), но более оперативным образом, так как оно действует теперь вполне успешно без подформулы $(\gamma_{\tau'_3}^{<\alpha\downarrow x} = \gamma \rightarrow \lim(\gamma))$, которая ранее вызывала значительное усложнение доказательства.

12) стр. 49. Эти понятия аналогичным образом можно ввести и в нерелятивизованной форме для $\alpha_1 = k$, но в этой форме они не используются в дальнейшем; кроме того, в этой форме они нуждаются в привлечении более сложного (неэлементарного) языка над L_k .

13) стр. 100. Можно доказать, что здесь $\tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} = \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$.

14) стр. 101. Снова в действительности здесь $\tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} = \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$.

15) стр. 104. В действительности здесь $a_{\tau}^{<\alpha_1} \equiv 1$ на $] \tau_1, \tau_2[$
и снова $\tilde{\delta}_{\tau_2}^{<\alpha_1} = \gamma_{\tau_1}^{<\alpha_1}$.

16) стр. 128. Последнее условие не является необходимым, но всё-таки принимается чтобы обеспечить единственность такой лестницы для некоторого удобства.

Литература

- [8] Drake F. R., *Set Theory, an Introduction to Large Cardinals*, Amsterdam, North-Holland, 1974.
- [9] Kanamori A., *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – NewYork, 2010.
- [10] Киселев А.А., О субнедостижимых кардиналах, *Ред. жс. “Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук”*, 1989, Деп. в ВИНТИ N7794-B90.
- [11] Киселев А.А., Редуцированные спектры формул над субнедостижимыми кардиналами, *Ред. жс. “Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук”*, 1989, Деп. в ВИНТИ N1246-B90.
- [12] Киселев А.А., Об элиминации субнедостижимости, *Ред. жс. “Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук”*, 1995, Деп. в ВИНТИ N1744-B95.
- [13] Киселев А.А., О порождении субнедостижимости, *Ред. жс. “Изв. АН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук”*, 1997, Деп. в ВИНТИ N3800-B97.
- [14] Киселев А.А., Лебедев А. В., Об информативных свойствах редуцированных матриц над субнедостижимыми кардиналами, *Ред. жс. “Изв. АН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук”*, 1997, Деп. в ВИНТИ N3801-B97.

- [15] Киселев А.А., О недостижимых кардиналах, *Ред. ж. "Изв. АН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук"*, 1998, Деп. в ВИНТИ N3701-B98.
- [16] Киселев А.А., Некоторые комментарии к статье "О недостижимых кардиналах", *Ред. ж. "Изв. АН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук"*, 1989, Деп. в ВИНТИ N1744-B95.
- [17] Kiselev A. A., *Inaccessibility and Subinaccessibility*, Belorussian State University, Minsk, 2000.
- [18] Jech T. J., *Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – NewYork, 1971.
- [19] Kripke S., An extension of a theorem of Gaifman-Hales-Solovay, *Fund. Math.*, **61** (1967), 29-32.
- [20] Cohen P. J., The independence of the Continuum Hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **50** (1963), 1143-1148; **51** (1964), 105-110.
- [21] Lévy A., Independence results in set theory by Cohen's method, IV (abstract), *Notices Amer. Math. Soc.*, **10** (1963), 592-593.
- [22] Gödel K. F., *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton, Princeton University Press, 1940.
- [23] Addison J. W., Some consequences of the axiom of constructibility, *Fund. Math.*, **46** (1959), 337-357.
- [24] Kogalovski S. R., Some easy consequences of the axiom of constructibility, *Fund. Math.*, **82**, №3 (1974), 245-267.
- [25] Tarski A., Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philos.*, **1** (1935), 261-405.

- [26] Solovay R. M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Math.*, **92** (1970), 1-56.
- [27] Kiselev A. A., *Inaccessibility and Subinaccessibility*, Second edition, enriched and improved, Part I, Belarusian State University, Minsk, 2008.
- [28] Kiselev A. A., *Inaccessibility and Subinaccessibility*, Second edition, enriched and improved, Part II, Belarusian State University, Minsk, 2010.
- [29] Киселев А. А., *Недостижимость и субнедостижимость*, Часть I, Белорусский государственный университет, Минск, 2011.
- [30] Solovay R. M., The cardinality of Σ_2^1 sets of reals, *Foundations of Mathematics*, Symposium papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel, Berlin, Springer-Verlag 1969, 58-73.
- [31] Silver J.H., Measurable cardinals and Δ_3^1 well-orderings, *Ann.Math.*, **94** (1971), 414-446.
- [32] Stern J., Le problème de cardinaux singuliers (d'après R. B. Jensen et Silver), *Lect. Notes Math.*, **677** (1978), 59-72.
- [33] Dodd A. J., Jensen R. B., The core model, *Ann. Math. Log.*, **20** (1981), 43-75.
- [34] Dodd A. J., Jensen R. B., The covering lemma for K , *Ann. Math. Log.*, **22** (1982).
- [35] Gitik M., Magidor M., Woodin W. H., Two week consequences of 0^\sharp , *J. Symb. Log.*, **50** (1985), N3, 597-603.
- [36] Devlin K. J., Jensen R. B., Marginalia to a Theorem of Silver, in: *Proceedings of ISILC Kiel 1974*, *Lecture Notes* Vol. 499, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.

- [37] Kleinberg E.M., *Infinitary Combinatorics and the Axiom of Determinateness*, Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Springer-Verlag, 1977.
- [38] Mignone R. J., Ultrafilters resurting from the axiom of determinateness, *Proc. London Math. Soc.*, **43** (1981), 582-605.
- [39] Becker H. S., Determinacy implies that \aleph_2 is sypercompact, *Jsr. J.Math.*, **40** (1981), 229-239.
- [40] Mycielsky J., On the axiom of determinateness, *Fund. Math.*, **53** (1964), 205-224.
- [41] Louveau A., Détermination des jeux G_ω^* , *C. r. Acad. sci.*, **282** (1976), № 10.
- [42] Martin D. A., Borel determinacy, *Ann. Math.*, **102** (1975), 363-371.
- [43] Shelah S., Can you take Solovay's inaccessible away?, *Jsr. J.Math.*, **48** (1984), 1-47.
- [44] Raisonniier J., A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measurable cardinals and related results, *Jsr. J.Math.*, **48** (1984), 48-56.
- [45] Specker E., Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiome), *Zeitschrift für Math. Log. und Grund. der Math.*, **3** (1957), 173-210.
- [46] Harrington L. A., Shelah S., Some exact equiconsistency results in set theory, *Notre Dame J. Form. Log.*, **26** (1985), 178-188.
- [47] Kanovei V.G., About one consequence of Martin's axiom, *Mat. zametki*, **26** (1979), № 1, 113-121. (Russian)

Научное издание

Киселев Александр Анатольевич

**НЕДОСТИЖИМОСТЬ
И
СУБНЕДОСТИЖИМОСТЬ**

В двух частях

Часть II

Ответственный за выпуск *Т. Е. Янчук*

Подписано в печать 10.07.2011. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Ризография. Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 8,2.

Тираж 100 экз. Заказ 473.

Республиканское унитарное предприятие

“Издательский центр Беларуского Государственного Университета”

ЛИ № 02330/0494361 от 16.03.2009.

Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

в Республиканском унитарном предприятии

“Издательский центр Беларуского Государственного Университета”

ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.

Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.